

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 532.529.5

Рыбдылова Оюна Данзановна

**ПОПЕРЕЧНАЯ МИГРАЦИЯ И ФОКУСИРОВКА
ИНЕРЦИОННОЙ ПРИМЕСИ В СДВИГОВЫХ ПОТОКАХ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. А.Н. Осипцов

Москва – 2012

Оглавление

Введение	4
1 Обзор литературы по исследованиям поперечной миграции частиц и дисперсных пограничных слоев	12
2 Двухжидкостная модель разреженной дисперсной смеси	25
2.1 Основные предположения и уравнения	25
2.2 Полный лагранжев метод	33
3 Поперечная миграция инерционной примеси в пограничном слое на плоской стенке. Сравнение расчетов с экспериментом и анализ применимости модели.	35
3.1 Течение запыленного газа в пограничном слое у вертикальной пластины	38
3.2 Течение суспензии в пограничном слое на горизонтальной пластине	41
4 Пристенная двухфазная ламинарная струя	49
4.1 Постановка задачи о пристенной ламинарной двухфазной струе	49
4.2 Автомодельное решение для параметров несущей фазы в пристенной ламинарной струе	52
4.3 Полный лагранжев метод расчета параметров дисперсной фазы	58
4.4 Результаты численного решения	59
5 Подъем частиц за движущейся ударной волной	73
5.1 Постановка задачи о развитии пограничного слоя запыленного газа за движущейся плоской ударной волной	73
5.2 Автомодельное решение задачи о течении в сжимаемом пограничном слое на подвижной стенке	77

5.3	Определение параметров дисперсной фазы в задаче о течении запыленного газа в пограничном слое на подвижной стенке . . .	79
5.4	Результаты численных расчетов	81
6	Фокусировка частиц за ударной волной в плоском канале	91
6.1	Постановка задачи о течении запыленного газа за ударной вол- ной в узком канале	91
6.2	Обсуждение результатов	97
	Заключение	107
	Литература	110

Введение

Математическое моделирование пристеночных течений дисперсных сред актуально в связи с необходимостью исследования ряда природных явлений и широкого круга технических приложений. В аэромеханике, например, это – движение летательных аппаратов в запыленной атмосфере, обтекание стенок теплоэнергетических аппаратов двухфазной рабочей средой, в том числе – стенок и центральных тел в соплах ракетных двигателей; в промышленности – оптимизация рабочего процесса технологических и энергетических установок, использующих мелкодисперсные материалы, оценка пожаро- и взрывобезопасности угольных выработок, пневмотранспорт порошковых материалов, окраска и обработка поверхностей двухфазными струями; в медицине и биологии – гидродинамическая сортировка клеток; в экологии и метеорологии – движение речных и морских наносов, пыльные бури и др.

В перечисленных примерах существенную роль играет наличие сдвигового пограничного слоя вблизи обтекаемых поверхностей, обусловленного вязкостью несущей фазы, что приводит к появлению поперечной (к основному потоку) составляющей силы, действующей на частицы примеси. В результате действия поперечной силы пространственное распределение дисперсной фазы может быть крайне неоднородным: возможно формирование областей, свободных от частиц, а также локальных зон накопления частиц. В частности, в некоторых случаях наличие боковой силы может приводить к возникновению аэродинамической фокусировки частиц и формированию узких пучков с высокой концентрацией дисперсной фазы. В последнее время сфокусированные пучки микро- и наночастиц все более активно используются

в различных технологиях, например, для нанесения элементов микросхем, безыгольных инъекций, резки материалов, обработки поверхностей и др.

Экспериментальным исследованиям поперечной миграции малых частиц в сдвиговых течениях жидкости посвящена обширная литература. В экспериментальных работах, начиная с классической работы (Segre, Silberberg, 1962), в основном, исследовались суспензии с близкими значениями плотностей фаз и практически безынерционными частицами. В этом случае поперечная миграция частиц – медленный процесс, который происходит под действием очень малых сил, зависящих от расстояния до стенок канала, всего профиля скорости жидкости и присутствия других частиц. Поэтому случай миграции малоинерционных, нейтрально плавучих частиц наиболее сложен для теоретического описания.

В литературе совсем немного публикаций, посвященных экспериментальным исследованиям ламинарных сдвиговых течений сред с сильно различающимися инерционными свойствами фаз, таких как запыленные газы или аэрозоли. Имеется лишь несколько экспериментальных работ, в которых проведены детальные измерения профилей концентрации дисперсных частиц в ламинарном пограничном слое на горизонтальной и вертикальной плоской стенке. Это обусловлено высокой сложностью экспериментальных методик и необходимостью использования очень дорогостоящего оборудования. В то же время для теоретического описания поперечной миграции умеренно инерционных частиц, по-видимому, достаточно лишь учета подъемных сил сдвиговой природы (так называемых сил Сэфмана (P. Saffman, 1965, 1968)), обусловленных линейной частью неоднородности потока на масштабе частицы. Этот факт открывает возможность построения математических моделей, позволяющих дать количественное описание поперечной миграции умеренно инерционных частиц в сдвиговых потоках. В связи с этим исследования, проведенные в настоящей диссертации, были направлены на (i) построение математических моделей пристеночных двухфазных течений с инерционными частицами с учетом поперечных сил сдвиговой природы, а также (ii) параметрическое

численное моделирование структуры полей концентрации дисперсной фазы в ряде типичных ламинарных двухфазных течений типа пограничного слоя, представляющих самостоятельный интерес.

Целями настоящей работы являются:

- Математическое моделирование поведения дисперсной примеси в пристеночных сдвиговых течениях запыленного газа и разреженной суспензии в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Параметрическое исследование влияния подъемной силы, действующей на частицы, на распределение концентрации дисперсной фазы в пограничных слоях.
- Анализ имеющихся в современной литературе поправок к классическому выражению Сэфмана для подъемной силы, учитывающих наличие стенки и конечные значения отношений трансляционных и сдвиговых чисел Рейнольдса обтекания частиц, а также роли этих поправок при моделировании двухфазных пограничных слоев.
- Исследование роли сил Сэфмана в механизме подъема пыли за движущимися ударными волнами.
- Исследование возможности использования эффекта боковой миграции частиц под действием сил Сэфмана для создания фокусированных пучков микрочастиц. Параметрическое исследование течения запыленного газа за ударной волной, движущейся в микроканале, и анализ условий фокусировки частиц на оси канала за ударной волной.

Работа состоит из четырех основных частей. В первой части исследуется возможность использования модели двухфазного пограничного слоя с учетом подъемных сил Сэфмана для моделирования распределения дисперсной примеси в двухфазных сдвиговых течениях. С этой целью проведено численное моделирование течения в двухфазном ламинарном пограничном слое на горизонтальной и вертикальной пластине для значений параметров, соответствующих экспериментальным работам (Lee, 1982; Hussainov и др., 1994) [60, 68].

Получено удовлетворительное совпадение рассчитанных профилей концентрации частиц экспериментальным данным.

Вторая задача – исследование движения примеси в пристенной ламинарной струе запыленного газа. Поскольку в данном течении профиль продольной скорости несущей фазы имеет максимум, поперечная сила, действующая на частицы, в различных областях течения направлена в противоположные стороны. Поэтому при различных способах ввода частиц в струю можно получить качественно различные картины течения: как осаждение частиц на стенку, так и накопление частиц на некотором расстоянии от стенки.

Третья задача – исследование подъема частиц в пограничном слое за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в запыленном газе вдоль плоской стенки либо над эродирующим слоем дисперсного осадка. Данная постановка дополняет исследование (Ван, Осипцов, 1999) [6] с учетом современных литературных данных об уточненных выражениях для подъемной силы сдвиговой природы (Асмолов, 1992; Асмолов, 1999; McLaughlin, 1993; Cherukat, McLaughlin, 1994) [3, 38, 45, 79]. Кроме того, в отличие от ранее рассмотренных постановок, в исследуемой постановке массовый поток частиц, вовлекаемых в движение, связывается с локальной динамической скоростью в пограничном слое за ударной волной.

В четвертой части работы впервые рассмотрено движение запыленного газа за ударной волной, движущейся в плоском или осесимметричном микроканале. Исследуется возможность фокусировки частиц на плоскости/оси симметрии канала за счет поперечных сил сдвиговой природы.

В качестве основы математического описания двухфазной среды в диссертации принята двухконтинуальная модель запыленного газа с пренебрежимо малой объемной и массовой концентрацией частиц. Считается, что частицы не влияют на параметры несущей фазы. Поля скорости и температуры несущей фазы находятся численно: либо с использованием известных автоматизированных решений, либо из решения параболизированных уравнений Навье-Стокса конечно-разностным методом на эйлеровой сетке. Поскольку поперечная си-

ла, действующая на частицы из-за неоднородности потока, может приводить к возникновению пересечения траекторий частиц, формированию “складок” и “сборок” фазового объема, а также фрагментации фазового объема и появлению зон свободных от частиц, стандартное эйлерово описание дисперсной фазы становится неприменимым. Для преодоления перечисленных трудностей дисперсная фаза в диссертации описывается с помощью так называемого *полного лагранжева подхода*, предложенного в работах А.Н. Осипцова (Осипцов, 1998, 2000, 2008) [28, 86, 87]. Этот подход, основанный на использовании лагранжева описания дисперсной фазы и привлечении дополнительных уравнений для компонент якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным, позволяет находить все параметры дисперсной фазы, включая числовую концентрацию частиц, вдоль выбранных траекторий частиц и рассчитывать с контролируемой точностью структуру областей пересекающихся траекторий и зон накопления частиц. Именно этот подход позволил провести исследования, изложенные в настоящей диссертации.

В работе получены следующие **новые результаты**, выносимые на защиту:

- В рамках приближения пограничного слоя для модели взаимопроникающих континуумов с использованием полного лагранжева подхода для дисперсной фазы исследована поперечная миграция частиц в сдвиговых течениях запыленного газа. На основании сравнения расчетов с известными экспериментальными данными по распределению примеси в пограничных слоях на горизонтальной и вертикальной пластинах сделан вывод о необходимости учета сил Сэфмана при описании высокоградиентных двухфазных течений. Указанный учет позволяет с удовлетворительной точностью описывать формирующиеся профили концентрации дисперсной фазы.
- Исследовано распределение дисперсной примеси в плоской ламинарной пристенной струе. Найдены области выпадения частиц на твердую по-

верхность. Показано, что в дальнем поле струи формируются две области накопления частиц – у стенки и на некотором расстоянии от нее.

- С учетом современных литературных данных о поправках к силе Сэфмана проведено параметрическое численное исследование подъема пыли в пограничном слое за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в запыленном газе вдоль твердой стенки или над эродирующим слоем осадка. Показано, что учет влияния стенки на подъемную силу, действующую на частицы, не приводит к качественной перестройке картины течения дисперсной примеси. При движении ударной волны над слоем осадка в профиле концентрации частиц формируются два максимума, соответствующие двум областям накопления частиц – на стенке и на границе газопылевой смеси.
- Впервые обнаружен эффект аэродинамической фокусировки инерционных частиц на оси/плоскости симметрии микроканала, по которому движется ударная волна. На основании параметрических численных расчетов найдены области определяющих параметров, при которых за ударной волной происходит оптимальная фокусировка дисперсной фазы и формирование коллимированного пучка частиц. Этот эффект наиболее выражен в случае микроканалов, диаметр которых сравним с толщиной пограничных слоев, нарастающих на стенках за ударной волной, на длинах скоростной релаксации дисперсной фазы.

Достоверность результатов диссертации обусловлена использованием строгих математических моделей движения двухфазных сред. В численных алгоритмах применялись хорошо апробированные методы с контролем точности. Точность расчетов подтверждается сравнением результатов с известными численными решениями, а также соответствием полученных результатов некоторым известным экспериментальным данным.

Научная значимость работы состоит в развитии моделей и методов исследования двухфазных пограничных слоев. На основе сопоставления расчет-

ных и экспериментальных данных показана необходимость учета подъемных сил Сэфмана при моделировании высокоградиентных сдвиговых двухфазных течений с умеренно инерционными частицами. Впервые обнаружен эффект аэродинамической фокусировки инерционных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования развитых методов и подходов для расчета двухфазных пограничных слоев, систем активной тепловой защиты, а также возможностью применения полученных результатов для развития технологий, использующих фокусированные пучки микрочастиц. Проведенные расчеты распределения концентрации частиц за ударными волнами следует учитывать при оценке концентрационных пределов взрывобезопасности промышленных пылевых взвесей.

Результаты, полученные в диссертации, докладывались на следующих научных конференциях: Конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (2006, 2009, 2010, 2011); Конференции МГУ “Ломоносовские чтения” (2007, 2010), Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011), XVI школе-семинаре “Современные проблемы аэрогидродинамики” (Сочи, 2010), Международной аэрозольной конференции (Хельсинки, 2010), Седьмой международной конференции по теплопереносу, механике жидкости и термодинамике (Анталья, 2010), X международной школе-семинаре “Модели и методы аэродинамики” (Евпатория, 2010), VIII Молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения – 2009” (Казань, 2009), IV Международной конференции “Двухфазные системы в наземных и космических приложениях” (Новосибирск, 2009), Всероссийской конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100-летию акад. Л.И. Седова (Москва, 2007).

За работу “Фокусировка частиц за движущейся ударной волной в узком канале” автор удостоен звания одного из победителей Всероссийского конкурса инновационных проектов программы “Участник молодежного научно-инновационного конкурса 2009” (“У.М.Н.И.К. – 2009”).

Результаты работы обсуждались на специализированных научных семинарах: семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2004–2009), семинаре по механике многофазных сред под руководством д.ф.м.н. А.Н. Осипцова (НИИ механики МГУ, Москва, 2004–2011), семинаре по механике сплошных сред под руководством акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. А.А. Бармина, проф. В.П. Карликова (НИИ механики МГУ, Москва, 2009), семинаре по механике сплошных сред под руководством акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. В.П. Карликова, члена-корр. РАН О.Э. Мельника (НИИ механики МГУ, Москва, 2011).

Основные результаты работы изложены в 17 научных публикациях [109–125], из которых 7 – статьи (в том числе 4 статьи из журналов перечня ВАК) и 10 – тезисы докладов. Во всех работах автору принадлежит участие в постановке задачи, разработка алгоритмов решения, численное моделирование и анализ результатов. Все положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем.

Глава 1. Обзор литературы по исследованиям поперечной миграции частиц и дисперсных пограничных слоев

Первые работы по исследованию поперечной миграции частиц в сдвиговых потоках были связаны с изучением движения крови в каналах. В 1836 году Пуазейль опубликовал работу, основанную на многочисленных экспериментах течения крови в каналах, в которой впервые было показано, что вблизи стенок канала формируется область, свободная от частиц (Poiseuille, 1836) [91]. В последующих исследованиях неоднократно обращалось внимание на неоднородное распределение эритроцитов в течении крови в сосудах (см. например, (Taylor, 1955; Bayliss, 1959) [41, 104]). В классической работе (Segre, Silberberg, 1962) [99] экспериментально исследовалось движение нейтрально плавучих частиц (плотность вещества частиц совпадает с плотностью несущей фазы) в течении Пуазейля в длинной трубе при низких значениях чисел Рейнольдса основного течения. Было получено, что частицы в таком течении собираются в равновесном положении на расстоянии 0.6 радиуса трубы от оси симметрии. Этот эффект был назван авторами “пинч” (“pinch”)-эффект – частицы суспензии медленно мигрируют поперек основного потока и ниже по течению собираются в узкое кольцо, коаксиальное оси трубы. Далее последовала целая серия работ, в которых изучалось влияние различных факторов на поперечную миграцию частиц в различных течениях суспензии в трубах и каналах. В работе (Oliver, 1962) [84] исследовалась поперечная миграция частиц в отсутствие их вращения, в (Jeffrey, Pearson, 1965; Karnis и др., 1966; Aoki и др., 1979) [37, 64, 65] изучалось влияние отношения плотностей вещества частиц и несущей фазы, а также отношения радиуса частиц

к радиусу трубы на положение частиц в вертикальном канале. В (Tachibana, 1973) [103] рассмотрено влияние вращения на положение нейтрально плавучих частиц в каналах круглого и квадратного сечения. В перечисленных работах, помимо повторения эффекта Сегре-Зильберберга (Segre, Silberberg, 1962) [99] было получено, что радиус кольца частиц уменьшается, если скорость частиц меньше скорости основного потока и наоборот – частицы собираются ближе к стенкам трубы, если их скорость выше скорости несущей фазы. В (Нап и др., 1999) [56] исследовалась поперечная миграция частиц в течении суспензий в круглой трубе при различных значениях объемной доли частиц. Было показано, что область накопления частиц меняется в зависимости от объемной доли примеси и числа Рейнольдса, посчитанного по радиусу частиц и средней скорости потока. Частицы могут собираться в кольцо, на оси трубы, либо профиль концентрации может иметь два локальных максимума – на оси симметрии и на некотором расстоянии от стенки. В (Matas и др., 2004) [76] изучается трансформация кольца частиц, полученного в оригинальном опыте Сегре и Зильберберга, в зависимости от числа Рейнольдса основного течения. Показано, что с увеличением числа Рейнольдса диаметр и ширина этого кольца увеличиваются.

Следует отметить, что во всех перечисленных работах плотности вещества частиц и несущей фазы отличались несущественно, длины скоростной релаксации фаз были много меньше макромасштаба задачи, т.е. частицы двигались практически вместе с несущей фазой, и числа Рейнольдса обтекания частиц были, как правило, очень малы. В этих условиях обтекание частиц, а значит и подъемная сила, зависят от деталей течения на очень больших расстояниях от поверхности частицы, поскольку озееновская область вокруг частицы (область, по которой числа Рейнольдса уже имеют порядок единицы) может включать границы течения и поверхности других частиц суспензии. Поэтому попыток успешного теоретического описания поперечной миграции нейтрально плавучих частиц в неоднородных потоках, ограниченных твердыми стенками, совсем немного – можно отметить лишь работу (Ho, Leal;

1974) [59] , где с помощью громоздких вычислений с использованием метода сращиваемых разложений вычисляется поперечная сила, действующая на сферическую частицу в плоском течении Пуазейля. Теоретическое описание поперечной миграции нейтрально плавучих и почти нейтрально плавучих частиц в более общих случаях становится практически неразрешимой задачей, так как малая подъемная сила, действующая на частицу, зависит от очень многих факторов.

При описании поперечной миграции более инерционных частиц (числа Рейнольдса обтекания которых все еще меньше единицы, но скоростная релаксация и поперечная миграция происходит на масштабе, сравнимом с макромасштабом задачи) можно надеяться на то, что поперечная сила, действующая на частицу, зависит лишь от линейной части неоднородности профиля скорости обтекающей частицу потока. Такая ситуация типична для течений дисперсных сред с сильно отличающимися значениями плотностей фазы – это среды типа газозвесей или аэрозолей.

Заметим, что еще в работе (Bretherton, 1962) [43] было показано, что при полном пренебрежении инерционными эффектами в задаче обтекания сферы (т.е. в рамках уравнений Стокса) не возникает поперечной силы, действующей на частицу в неоднородном потоке, независимо от того вращается частица или нет. Поэтому для вычисления подъемной силы частицы необходимо рассматривать нелинейные уравнения Навье-Стокса.

Первые теоретические попытки учета инерционных эффектов и вычисления сил, поперечных основному потоку обтекания частицы, относятся к началу 60-х годов прошлого века. Так, в (Rubinow, Keller, 1961) [96] методом сращиваемых асимптотических разложений было получено выражение для поперечной силы, возникающей при вращении сферы в однородном потоке (сила Магнуса) при малых, но конечных числах Рейнольдса, посчитанных как по относительной скорости, так и по угловой скорости частицы. Впервые выражение для подъемной силы, действующей на сферу в неоднородном потоке, было получено в классических работах Ф. Сэфмана, 1965, 1968 [97].

Сэфман решил задачу об обтекании свободно вращающейся сферы неограниченным стационарным плоскопараллельным сдвиговым потоком при малых, но конечных числах Рейнольдса. При этом при построении решения методом сращиваемых асимптотических разложений предполагалось, что все три числа Рейнольдса $Re_s = \sigma U/\nu$, $Re_g = \sigma^2(dU/dz)/\nu$, $Re_\omega = \sigma^2\omega/\nu$, посчитанные по скорости обтекания частицы U , скорости сдвига набегающего потока и по угловой скорости вращения частицы, малы, причем $Re_s \ll Re_g^{1/2} \sim (Re_\omega)^{1/2}$, здесь σ – радиус частицы, ν – кинематическая вязкость жидкости, координата z направлена поперек потока. Полученное Сэфманом выражение для подъемной силы с учетом внесенного им же исправления (Сэфман, 1968) имеет вид:

$$\mathbf{f}_{Saf} = 6.46\sigma^2(\nu\rho)^{1/2}U\sqrt{|dU/dz|}.$$

Как видно, подъемная сила в этом приближении не зависит от вращения сферы, а вращение сказывается лишь в следующем приближении по числам Рейнольдса. Из сравнения сил Сэфмана и Магнуса следует, что в сдвиговом потоке, когда угловая скорость сферы имеет порядок локальной завихренности потока, сила Сэфмана заметно превосходит силу Магнуса.

Поправка к силе Сэфмана, учитывающая конечность отношения трансляционного числа Рейнольдса частицы и корня квадратного из сдвигового числа Рейнольдса, вычисленных по относительной скорости на масштабе частиц, была получена независимо в работах Е.С. Асмолова (1990) [2] и McLaughlin (1991) [78]. Следуя работе (Асмолов, 1990) [2], эта поправка может быть представлена в виде множителя

$$\varphi = (1 + 0.581r^2 - 0.439|r|^2 + 0.203r^4)^{-1}, \quad r = \frac{Re_s}{Re_g^{1/2}}.$$

В (Dandy, Dwyer, 1990) [48] проведены численные расчеты подъемной силы при конечных числах Рейнольдса обтекания сферы $Re_s < 100$ в предположении, что частица не вращается. Числа Рейнольдса по скорости сдвига в расчетах были порядка единицы. В (Mei, 1992) [80] предложены аналитические выражения, аппроксимирующие результаты расчетов (Dandy, Dwyer, 1990) [48].

Эти выражения будут использованы и в настоящей диссертации. В работах (Асмолов, 1992; Асмолов, 1999; McLaughlin, 1993; Cherukat, McLaughlin, 1994) [3, 38, 45, 79] при вычисления подъемной силы, действующей на частицу при малых числах Рейнольдса, учитывается влияние стенки. В последней из перечисленных работ рассматривается случай, когда расстояние между частицей и стенкой составляет несколько радиусов сферы; приведено аналитическое выражение, аппроксимирующее вычисленные значения подъемной силы. Это выражение имеет вид степенной функции от расстояния между частицей и стенкой и квадратичной функции по числам Рейнольдса обтекания сферы, посчитанных по скорости сдвига и относительной скорости. Указанное выражение с хорошей точностью описывает предельный случай, рассмотренный в (Leighton, Acrivos, 1985) [70], когда сфера лежит на стенке. Формула, приближающая табличные значения, приведенные в (Асмолов, 1992) [3], приведена в (Асмолов, Осипцов, 2008) [39].

В работах (Hall, 1988; Mollinger, 1996) [54, 82] проведены экспериментальные измерения осредненного значения подъемной силы, действующей на сферу, лежащую на стенке. Полученные экспериментальные значения подъемной силы частицы у стенки и зависимость этой силы от безразмерных параметров заметно отличаются от выражений, приведенных в теоретических работах, цитированных выше. Заметим, что эксперименты проводились для турбулентного потока газа, что, возможно, и объясняет различие в значениях подъемной силы. В работе (Асмолов, 1999) [38] теоретические результаты для подъемной силы также сравниваются с экспериментальными данными (Segre, Silberberg, 1962; Jeffrey, Pearson, 1965) [64, 99]. В случае, когда плотность частиц отличается от плотности несущей фазы, получено качественное совпадение результатов.

Перейдем теперь к анализу литературы по математическому моделированию двухфазных пограничных слоев. Начнем с исследования пограничных слоев в запыленном газе, где плотности фаз отличаются на три порядка и инерционность частиц очень существенна. Следует отметить, что для двух-

фазных сред понятие пограничного слоя не является столь же универсальным, как для однородных вязких жидкостей. Постановки задач для двухфазного пограничного слоя могут отличаться для течений около плоских и искривленных поверхностей (Стулов, 1979) [30], для режимов с наличием или отсутствием осаждения частиц (Осипцов, 1985) [26]. В рамках модели взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов (Нигматулин, 1987) [23] движение сред типа “газ – твердые частицы” было впервые подробно описано в цикле работ Ф. Марбла и его учеников, выполненных в конце 50х – начале 60х годов прошлого столетия (см. обзор (Marble, 1970) [75]). Подробно эта модель описана в Главе 2 настоящей диссертации. В этой же работе (Marble, 1970) [75] приведены первые приближенные исследования пограничного слоя на плоской стенке, полученные аналитическими методами.

Детальный обзор работ по математическому моделированию ламинарных течений запыленного газа в пограничных слоях до 1997 года дан в (Осипцов, 1997) [85]. Ряд исследований последних лет описан в монографиях А.Ю. Вараксина (2003, 2008) [7, 8], В.И. Терехова и М.А. Пахомова (2008) [31]. Также течение двухфазного пограничного слоя исследовались в работах (Циркунов, 1993; Гришин, Забарин, 1987; Забарин, 2004) [11, 15, 32]. Экспериментальное исследование течения запыленного газа в пограничном слое проведено в работе (Hussainov и др., 1994) [60]. Первые работы по течению запыленного газа в пограничном слое в начале 60-х годов прошлого столетия были посвящены решению задач Стокса (одномерное нестационарное течение вблизи бесконечной стенки, которая мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью в своей плоскости), Рэлея (течение вблизи стенки, совершающей периодические колебания в своей плоскости) и Блазиуса (стационарный пограничный слой на полуплоскости). В этих работах несущая фаза – вязкая несжимаемая жидкость, в межфазном обмене импульсом учитывается только сила Стокса. В (Liu, 1966; 1967) [71, 72] были найдены точные решения задач Рэлея и Стокса. Первые попытки решить задачу Блазиуса для запыленного газа были основаны на незамкнутых постановках задачи. Это связано с

тем, что использованная система уравнений двухфазного пограничного слоя была записана неверно: проекция уравнения движения частиц на нормаль к поверхности ошибочно была отброшена. Для замыкания постановок принимались априорные дополнительные предположения. Так, в (Chiu, 1962) [46] предполагалось, что числовая концентрация частиц в пограничном слое постоянна. В [75] сделано предположение о том, что нормальные компоненты скоростей обеих фаз совпадают. В (Soo, 1967; Hamed A, Tabakoff, 1972; Jain, Chosh, 1979) [55, 63, 101] делались попытки использовать интегральные методы для расчета течений двухфазных сред в пограничном слое, задавая профили некоторых параметров течения. В 1965 году Синглтон [100] впервые выписал асимптотически верные уравнения пограничного слоя запыленного газа со сжимаемой несущей фазой. В этой работе решение представлялось в виде рядов по малым и большим расстояниям от начала пластины, коэффициенты этих рядов предполагались зависящими от автомодельной переменной пограничного слоя для чистого газа. Заметим, что в этой работе автор использовал неверное предположение о постоянстве концентрации частиц в дальнем поле пограничного слоя.

Первые попытки численного решения уравнений двухфазного пограничного слоя предприняты в работах (Prabha, Jain, 1979; 1980) [92, 93], где рассмотрен лишь начальный участок релаксации скоростей фаз и показано, что по мере релаксации скоростей фаз на поверхности пластины концентрация частиц возрастает. Впервые задача Блазиуса в запыленном газе с исследованием всей области течения (от замороженного по скоростям фаз до равновесного) была численно исследована в работе А.Н. Осипцова (1980) [24]. В этой работе было показано, что в области, равновесной по скоростям фаз, решение имеет двухпалубную структуру. Верхняя часть области может быть описана автомодельным решением Блазиуса для эффективного газа с постоянной плотностью, а в нижней части профиль концентрации частиц существенно неоднороден, причем вид этого профиля зависит от течения в неравновесной по скоростям фаз области и принятых законов межфазного взаимодействия.

При стоксовском законе межфазного взаимодействия в равновесной области концентрация частиц на стенке имеет особенность – нарастает при приближении к стенке как $1/y$. В то же время в ряде экспериментальных работах было получено, что вблизи стенки концентрация частиц убывает. Причем этот эффект проявляется как в течении суспензии (например, (Segre, Silberberg, 1962; Lee, 1982) [68, 99]), так и в течении запыленного газа у пластины (например, (Hussainov и др., 1994) [60]). Этот факт указывает на необходимость более детального описания межфазного взаимодействия, в том числе учета подъемных сил.

Впервые сила Сэфмана была включена в постановку задачи о течении запыленного газа в пограничном слое еще в работах (Otterman, Lee, 1970; Lee, Chan, 1972) [69, 89]. Однако в этих работах решение строилось в виде рядов, аналогичных рядам в работе Синглтона, и так же использовалось неверное предположение о постоянстве концентрации частиц в дальней, равновесной по скоростям фаз, области течения. Поэтому, полученные в этих работах результаты, не представляют интереса. Впервые численные расчеты структуры двухфазного пограничного слоя на плоской стенке с учетом силы Сэфмана были проведены почти одновременно в работах А.Н. Осипцова (1988) [27] и В.А. Наумова [19] (1988). Было показано, что на начальном участке обтекаемой пластины под действием силы Сэфмана частицы оседают на стенку, а ниже по течению траектории частиц направлены в сторону внешнего потока. В (Осипцов, 1988) [27] были рассчитаны предельные (для равновесной по скоростям фаз области) профили концентрации частиц и показано, что учет силы Сэфмана приводит к уменьшению концентрации частиц в направлении стенки. В (Наумов, 1990) [20] решена аналогичная задача для неизотермического течения в двухфазном пограничном слое. В (Наумов, 1992) [21] исследовано осаждение частиц в пограничном слое с образованием жидкой пленки на стенке.

Ряд работ был посвящен исследованию механизмов подъема инерционных частиц в высокоскоростных пограничных слоях за движущимися ударны-

ми волнами. В различных условиях определяющими могут быть различные механизмы подъема частиц: отражение от стенки волн давления в плотном слое осадка (Gerrard, 1963) [52], неустойчивость поверхности слоя рыхлого дисперсного материала (Борисов, 1967) [5], турбулентная диффузия частиц (Merzkirch, Bracht, 1978) [81], искривление фронта волны при значительной массовой концентрации частиц и при наличии вертикальной неоднородности распределения частиц перед волной (Hishida, Hayashi, 1989) [58]. В ряде работ (например, (Бойко, 1987) [4]) исследуется влияние силы Магнуса на движение частиц в области за ударной волной, однако для согласования расчетов авторов с их же экспериментальными данными угловая скорость вращения частиц должна быть нереалистично высокой. В экспериментах о подъеме одиночных сферических частиц за ударной волной (Suzuki и др., 2005) [102] было получено, что одиночные частицы также отрываются от стенок ударной трубы, причем высота подъема частиц не зависит от их закрутки. В серии работ (Осипцов и др., 1991; Ван, Осипцов, 1999; Wang и др., 2006) [6, 88, 107] численно моделируется течение запыленного газа в пограничном слое за ударной волной, движущейся вдоль горизонтальной стенки. Исследован механизм подъема частиц за счет действия поперечной силы сдвиговой природы и получено, что на границе пограничного слоя, который формируется за ударной волной, движущейся по запыленному газу вдоль стенки или над эродирующим слоем дисперсного осадка, может сформироваться узкая область высокой концентрации частиц.

Следует отметить, что для двухфазных пограничных слоев типично возникновение локальных зон накопления частиц, которые в рамках модели точечных невзаимодействующих частиц соответствуют поверхностям неограниченного роста числовой плотности частиц. Такая область накопления на поверхности обтекаемой пластины в случае стоксовской силы частиц сопротивления была получена еще в [24]. Области, в которых траектории частиц пересекаются, образуя многослойные структуры, известные в литературе как “складки”, “пелены” и “шнуры”, исследовались также в работах (Крайко, 1979;

Крайко, Сулайманова, 1983) [16, 17]. Аналогичные особенности были обнаружены в недавних работах (Duck и др., 2004) [50] и (Foster и др., 2006) [51] в которых были рассмотрены двухфазная пристенная струя и двухфазный пограничный слой на клине в предположении стоксовского закона сопротивления частиц.

Детальная классификация возможных особенностей концентрации дисперсной фазы, появляющихся при решении уравнений бесстолкновительной модели запыленного газа, проведена в работе (Осипцов, 1984) [25], где показано, что особенности бывают двух типов – интегрируемые и неинтегрируемые. В последнем случае бесстолкновительная модель дисперсных частиц перестает быть применимой, и вблизи точек резкого увеличения концентрации частиц требуется усложнение модели, связанное с учетом непосредственного взаимодействия частиц. В случае интегрируемых особенностей концентрации требуется дополнительный анализ вероятности столкновения частиц или среднего расстояния между частицами в точках особенностей концентрации. Такой анализ был проведен в (Осипцов, 1984) [25] для нескольких простых случаев движения дисперсной фазы (допускающих аналитические решения для локального поведения концентрации частиц) с использованием вероятностной функции распределения среднего расстояния между частицами, введенной ранее в работе С.И. Чернышенко (1984) [34]. Было показано, что при достаточно малых средних объемных концентрациях дисперсной фазы (порядка 10^{-5} и менее), в точках типичных интегрируемых особенностей концентрации дисперсной фазы среднее расстояние между частицами все еще много больше радиуса частиц, и модель бесстолкновительного движения частиц, как правило, остается применимой.

При расчете параметров дисперсной фазы в течениях с пересечениями траекторий частиц поля скорости, температуры и концентрации частиц, становятся неоднозначными, а на границах таких областей возникают каустики, на которых поле концентрации частиц может иметь особенности. В таком случае применение эйлерова подхода, предполагающего однозначность всех

полевых параметров дисперсной фазы, становится проблематичным, и его использование приводит к весьма грубым погрешностям при вычислении поля концентрации частиц (как, например, в (Foster и др., 2005) [51] и др.). В работе (Healy, Young, 2005) [57] рассмотрены различные лагранжевы подходы и сделан вывод о предпочтительности метода, предложенного А.Н. Осипцовым (1998, 2000, 2008) [28, 86, 87]. Этот метод сейчас активно развивается и лежит в основе ряда работ по исследованию движения аэрозоля, например (Tsirkunov, Volkov, Tarasova, 2002; Зарипов и др., 2007; Гильфанов, Зарипов, 2008; Ijzermans, Meneguz, Reeks, 2010) [9, 61, 106, 108]. Подробно полный лагранжев метод (Осипцов, 1998, 2000, 2008) [28, 86, 87], использованный и в настоящей диссертации, описывается в Главе 2.

В последние годы активно развиваются технологии, которые используют аэродинамически сфокусированные пучки микрочастиц в приложениях, связанных с обработкой поверхностей и нанесением покрытий (Parygin и др., 2007) [90], фракционированием аэрозолей (Dahneke, Flachsbart, 1972) [47], безыгольным введением порошковых лекарственных препаратов (Quinlan, и др., 2001; Kendall, 2002) [66, 94], производством микросхем (“direct-write” нанотехнология) (Akhatov и др., 2008) [36] и др. Экспериментальная возможность аэродинамической фокусировки микрочастиц в узкий пучок впервые была продемонстрирована в работах (Murphy, Sears, 1964; Israel, Friedlander, 1967) [62, 83]. В большинстве случаев для фокусировки микрочастиц используются течения со сходящимися линиями тока несущей фазы, причем в силу скоростного отставания частиц теоретически возможно организовать такой поток, в котором частицы из конечного объема фокусируются в фиксированную точку пространства (De La Mora, Riesco-Chueca, 1987) [49]. В дозвуковых потоках аэрозольные пучки обычно создаются с помощью так называемых “аэродинамических линз”, т.е. одиночных или периодически расположенных областей сужения и расширения потока (параллельных пластин с круглыми коаксиальными отверстиями или профилированных сопел (см., например, (Liu и др., 1995) [73])). В стационарных сверхзвуковых потоках возможна фокуси-

ровка инерционных частиц за точкой пересечения ударных волн (Голубкина, Осипцов, 2007) [10]. В литературе имеется и пример аэродинамической фокусировки полидисперсных частиц, основанной на эффекте различия длин скоростной релаксации частиц разного сорта (Егорова и др., 2004) [14]. Для нестационарных потоков наиболее известен механизм фокусировки инерционной примеси в узлах стоячих акустических волн. На данном механизме основан широко используемый метод акустической коагуляции и осаждения мелкодисперсных аэрозолей (Медников, 1963; Temkin, 1994; Губайдуллин и др., 1994) [12, 18, 105].

В работах, перечисленных выше, фокусировка частиц осуществляется лишь под действием силы аэродинамического сопротивления (при малых числах Рейнольдса обтекания частиц – силы Стокса). Принципиально иной механизм фокусировки инерционных частиц может проявляться в течениях типа пограничного слоя с большими поперечными градиентами скорости (узких каналах, слоях смешения, струях, следах и т.д.). Этот механизм связан с появлением боковой силы, вызванной неоднородностью потока на масштабе частицы. Так, эффект Сегре-Зильберберга (накопление нейтрально плавучих частиц в определенном положении в канале) предлагается использовать для фильтрации клеток, в проточной цитометрии (см., например, (Bhagat и др., 2008; Kuntaegowdanahalli и др., 2009) [42, 67]), при создании так называемой “лаборатории на чипе” – миниатюрного устройства, позволяющего проводить один или несколько лабораторных процессов на одном чипе. Возможность фокусировки субмикронных частиц под действием силы Сэфмана в стационарном течении аэрозоля со скоростью порядка 100 м/с в слабо сужающемся микрокапилляре диаметром порядка 10^{-4} м продемонстрирована в недавней работе (Akhatov и др., 2008) [36]. Данный эффект использован в (Akhatov и др., 2008) [36] для модификации соплового блока, создающего стационарные фокусированные пучки микрочастиц, предназначенные для производства микросхем с помощью “direct-write” (“прямого напыления”) нанотехнологии. Следует отметить, что к фокусировке очень мелких, субмикрон-

ных частиц в пограничных слоях могут приводить и силы, проявляющиеся при конечных числах Кнудсена обтекания частиц, например, так называемые “термофоретические силы” (Циркунов, Тарасова, 1990) [33]. Таким образом, на данный момент существует целая серия работ, посвященных фокусировке микрочастиц в дисперсных потоках. Их приложения могут использоваться в производстве и медицине.

Приведенный обзор литературы позволяет сделать вывод, что в настоящее время являются актуальными параметрические исследования течений типа двухфазных пограничных слоев с инерционными частицами на базе использования двухконтинуальных моделей с привлечением современных литературных данных о выражениях для подъемных сил сдвиговой природы (сил Сэфмана с поправками на конечность чисел Рейнольдса и наличие границ течения). Особый интерес представляют погранслоиные течения со “складками” и “сборками” фазового объема дисперсной фазы, формированием локальных областей пересекающихся траекторий частиц и зон накопления частиц, аккуратное исследование которых стало возможным в последнее время благодаря развитию полного лагранжева подхода. Важным и актуальным представляется исследование сжимаемых пограничных слоев в высокоскоростных двухфазных потоках с целью выяснения роли подъемных сил в механизмах выноса частиц из пристеночной области и исследование новых схем аэродинамической фокусировки частиц в сдвиговых потоках за счет сил Сэфмана.

Исследованию перечисленного круга проблем и посвящена настоящая диссертация.

Глава 2. Двухжидкостная модель разреженной дисперсной смеси

2.1 Основные предположения и уравнения

Для описания движения разреженных суспензий и запыленного газа используется модель взаимопроникающих континуумов (Нигматулин, 1987) [23]. Многофазной континуум представляет собой совокупность некоторого числа континуумов, каждый из которых относится к определенной фазе вещества. Малый индивидуальный объем каждого из континуумов представляют собой объем, который мал по сравнению с характерным размером задачи, но содержит большое число частиц данной фазы. Для каждой точки пространства определяют средние (континуальные) кинематические и динамические параметры каждой фазы. Взаимодействие между фазами осуществляется за счет обмена массой, импульсом и энергией между ними. Предполагается, что

- размеры включений (диаметры частиц) много больше характерной длины свободного пробега молекул несущей фазы, таким образом, можно считать, что частица обтекается в режиме сплошной среды;
- дисперсная фаза в каждом элементарном макрообъеме присутствует в виде сферических включений одинакового радиуса σ , массы m . Объемная концентрация τ дисперсной фазы пренебрежимо мала, но массовая концентрация может быть конечна;
- эффектами хаотического (в том числе броуновского) и внутреннего (вращение, деформация) движений дисперсных частиц пренебрегается;
- процессы дробления и образования новых частиц не рассматриваются;

- течение ламинарное.

Этим требованиям могут удовлетворять смеси газа или жидкости с твердыми сферическими частицами, радиус которых имеет порядок $10^{-5} - 10^{-2}$ см. Так как объемная концентрация частиц мала, столкновениями и взаимодействием частиц можно пренебречь. Поскольку (в силу принятых предположений об отсутствии хаотических составляющих скорости) среднемассовая скорость частиц совпадает со скоростью реальной частицы, находящейся в рассматриваемой точке пространства, тензор напряжений в континууме, описывающем среду частиц, отсутствует (Marble, 1970) [75].

В диссертации рассматриваются течения дисперсных сред, у которых несущая фаза есть вязкая жидкость или газ. В наиболее общем случае, когда сжимаемость несущей фазы существенна, последняя описывается полными уравнениями Навье-Стокса с источниковыми членами, учитывающими обмен импульсом и энергией с дисперсной фазой (Marble, 1970) [75] (для простоты уравнения записаны для случая стационарных течений):

$$\operatorname{div} \rho^* \mathbf{v}^* = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\rho^* (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* = \nabla (\mathbf{P}^*) - n_s^* \mathbf{f}_s^*,$$

$$\mathbf{P}_{ij}^* = -p^* \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu^* \operatorname{div} \mathbf{v}^* \delta_{ij} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right),$$

$$\rho^* c_p (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) T = (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) p^* + \operatorname{div} (\lambda^* \nabla T^*) + \Phi - n_s^* \mathbf{f}_s^* \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*) - n_s^* q_s^*,$$

$$\Phi = \mu^* \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right].$$

Здесь ρ^* , $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$, T^* , μ^* , λ^* , c_p – плотность, скорость, температура, вязкость, теплопроводность и теплоемкость несущей фазы; \mathbf{P}_{ij}^* – компоненты тензора напряжений газа, p^* – давление; n_s^* – числовая концентрация дисперсной фазы, которая связана с плотностью вещества ρ_s^* и числовой концентрацией частиц соотношением $\rho_s^* = m n_s^*$; \mathbf{f}_s^* – сила межфазного взаимодействия, m – масса частицы. Здесь и далее звездочкой отмечены размерные

переменные величины. Для описания течения суспензий уравнения несущей фазы упрощаются и превращаются в уравнения несжимаемой вязкой жидкости (Седов, 1970) [29].

Континуальные уравнения, описывающие дисперсную фазу, для стационарных течений записываются в виде:

$$\operatorname{div} \rho_s^* \mathbf{v}_s^* = 0, \quad (2.1.2)$$

$$m (\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) \mathbf{v}_s^* = \mathbf{f}_p^*,$$

$$c_s (\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) T_s^* = q_s^*.$$

Здесь q_s^* – тепловой поток, поступающий от несущей фазы к частице, c_s – теплоемкость вещества частиц, \mathbf{f}_p^* – сила, действующая на частицу. Нижним индексом s здесь и далее обозначаются параметры, соответствующие дисперсной фазе. В настоящей работе будет рассмотрен ряд задач, в которых, помимо силы межфазного взаимодействия \mathbf{f}_s^* , на частицу действует еще и сила тяжести:

$$\mathbf{f}_p^* = \mathbf{f}_s^* + m\mathbf{g}.$$

В общем случае в межфазном взаимодействии \mathbf{f}_s^* следует учитывать силы различной природы, в том числе и силы, учитывающие нестационарность обтекания частиц. При малых числах Рейнольдса обтекания частицы без учета коллективных эффектов силу \mathbf{f}_s^* можно представить в виде суммы (Махеу, Riley, 1983) [77]:

$$\mathbf{f}_s^* = \mathbf{f}_{St}^* + \mathbf{f}_A^* + \mathbf{f}_m^* + \mathbf{f}_{BB}^* + \mathbf{f}_L^*, \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{f}_{St}^* = 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*), \quad \mathbf{f}_A^* = \rho^*\tau_s(\mathbf{w}^* - \mathbf{g}), \quad \mathbf{f}_m^* = \frac{1}{2}\rho^*\tau_s \left(\mathbf{w}^* - \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt} \right).$$

Здесь \mathbf{f}_{St}^* – сила сопротивления Стокса, \mathbf{f}_A^* – сила Архимеда, \mathbf{f}_m^* – сила присоединенных масс, \mathbf{f}_{BB}^* – сила Бассе-Буссинеска, учитывающая предысторию обтекания частицы, \mathbf{f}_L^* – боковая (подъемная) сила. Перечисленные силы действуют на сферическую частицу объема τ_s , движущуюся со скоростью \mathbf{v}_s^* в среде, имеющей плотность ρ^* , вязкость μ^* , скорость \mathbf{v}^* и ускорение

\mathbf{w}^* . Следует отметить, что выражение для силы Бассэ-Буссинеска было получено при довольно строгих ограничениях на характер движения частицы (Maxey, Riley, 1983) [77]. Существующие оценки (см., например, (Lovaletti, Brady, 1993) [74]) показывают, что в большинстве случаев эффект этой силы на движение частицы несущественен.

В диссертации рассматривается ряд задач о движении запыленных газов, в которых плотности вещества фаз сильно различаются $\rho^*/\rho_{sm} \ll 1$. В этом случае, как показано в (Нигматулин, 1987) [23], сила аэродинамического сопротивления вносит основной вклад в межфазный обмен импульсом, но в течениях с большими градиентами скорости (типа пограничных слоев или узких каналов) также существенным может быть вклад подъемной силы сдвиговой природы (Осипцов, 1988) [27]. В таких ситуациях суммарная сила представляется в виде суммы

$$\mathbf{f}_s^* = \mathbf{f}_{St}^* + \mathbf{f}_L^*. \quad (2.1.4)$$

В случае, когда число Рейнольдса обтекания частиц, посчитанное по относительной скорости конечно, силу аэродинамического сопротивления частиц можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{St}^* &= 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*)\Psi_{st}, \quad (2.1.5) \\ \Psi_{st} &= \left(1 + \frac{1}{6}\text{Re}_s^{2/3}\right) (1 + \exp(-0.427\text{M}_s^{-4.63})), \\ \text{Re}_s &= \frac{2\sigma\rho^*|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*|}{\mu^*}, \quad \text{M}_s = \frac{|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*|}{a^*}. \end{aligned}$$

Здесь Ψ_{st} – поправка, учитывающая отклонение закона сопротивления частиц от стоксовского в форме, предложенной в работе (Carlson, Hoglund, 1964) [44], Re_s , M_s – числа Рейнольдса и Маха обтекания частиц, a^* – местная скорость звука набегающего потока.

Инерционная боковая сила \mathbf{f}_L^* возникает за счет сдвигового характера течения несущей фазы на масштабе частицы. Для ее описания можно использовать выражение, обобщающее формулу Сэфмана на случай конечных чисел

Рейнольдса обтекания частиц ((Mei, 1992) [80]):

$$\mathbf{f}_L^* = \text{sign} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) 6.46 \sigma^2 \sqrt{\mu^* \rho^* \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|} (u^* - u_s^*) \mathbf{j} \Psi_{saf}, \quad (2.1.6)$$

$$\Psi_{saf} = 0.4687 (1 - \exp(-0.1 \text{Re}_s)) \left(\frac{\text{Re}_g}{\text{Re}_s} \right)^{1/2} + \exp(-0.1 \text{Re}_s) \quad (\text{Re}_s < 40),$$

$$\Psi_{saf} = 0.0741 \text{Re}_g^{1/2} \quad (\text{Re}_s > 40),$$

$$\text{Re}_g = \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right| \frac{\sigma^2 \rho^*}{\mu^*}.$$

Здесь выражение для f_L^* , предложенное в работе (Mei, 1992) [80], является аналитической аппроксимацией численных расчетов обтекания сферы сдвиговым потоком при конечных числах Рейнольдса, проведенных в работе (Dandy, Dwyer, 1990) [48], Re_g – число Рейнольдса обтекания частиц, посчитанное по скорости сдвига потока, \mathbf{j} – орт оси y .

Указанное выражение для подъемной силы справедливо на больших расстояниях от границ течения. При конечных расстояниях между частицей и твердой стенкой (сравнимом с размером частицы) следует учитывать поправки к подъемной силе на наличие стенки. Эта проблема исследовалась в ряде работ: (Saffman, 1965; Асмолов, 1992; Асмолов, 1992; Асмолов, 1999; McLaughlin, 1991; McLaughlin, 1993; Asmolov, Osipitsov, 2008) [2, 3, 38, 39, 78, 79, 97]. Для того чтобы охарактеризовать влияние стенки на подъемную силу, введем так называемую длину Сэфмана $L_{Saf} = (\nu / (\partial u^* / \partial y^*))^{1/2}$. Область течения по отношению к частице можно разбить на три: внутреннюю, в которой расстояние между частицей и стенкой порядка радиуса сферы ($y^* / L_{Saf} \ll 1$), промежуточную ($y^* / L_{Saf} = O(1)$) и внешнюю ($y^* / L_{Saf} \gg 1$). В приближении $y^* / L_{Saf} \ll 1$ задача о влиянии стенки на подъемную силу решена в работе (Cherukat, McLaughlin, 1994) [45]; предел, когда сфера касается стенки, рассмотрен в работе (Leighton, Acrivos, 1985) [70]. Модельная задача, в которой рассматривается “промежуточная” область, решена в (Асмолов, 1992; McLaughlin, 1993) [3, 79]. В этой же работе результаты расчетов поправки к подъемной силе Сэфмана приведены в виде таблиц. В (Asmolov, Osipitsov,

2008) [39] предложена формула, приближающая значения соответствующей таблицы, для случая, когда поперечный градиент скорости жидкости, обтекающей сферу, и разность продольных компонент скоростей жидкости и сферы положительны.

Выражение для потока тепла к частице можно представить в виде:

$$q_s^* = \frac{4\pi\sigma\lambda^*}{m}(T^* - T_s^*)\Psi_h, \quad (2.1.7)$$

$$\Psi_h = 1 + 0.3\text{Pr}^{1/3}\text{Re}_s^{1/2},$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p\mu_+^*}{\lambda_+^*}.$$

Здесь Ψ_h – поправочная функция к закону теплообмена при нулевых числах Пекле, предложенная в (Ranz, Marshall, 1952) [95], Pr – число Прандтля. Заметим, что, как показано в ряде работ, влияние сдвиговости потока на коэффициент теплообмена сферической частицы практически несущественно.

В настоящей работе система уравнений (2.1.1) – (2.1.2) решается в приближении пограничного слоя, то есть в пределе $\text{Re} \rightarrow \infty$, где Re – число Рейнольдса, посчитанное по характерным значениям параметров задачи:

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 L_0 U_0}{\mu_0}.$$

Здесь L_0 , U_0 , ρ_0 , μ_0 – характерные для каждой из рассматриваемых задач масштабы длины, скорости, плотности и вязкости несущей фазы. В рассматриваемых задачах система координат вводится стандартным образом для пограничного слоя: ось Ox направлена вдоль стенки, ось Oy – по нормали к ней. Для задачи о движении облака частиц за ударной волной в канале, ось Ox направлена вдоль оси канала.

Переходя к пределу больших чисел Рейнольдса, в погранслойном приближении (Osipov, 1997) [85] из (2.1.1) – (2.1.2) получаем систему

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (2.1.8)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \alpha \beta n_s \mu (u - u_s) \Psi_{st},$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \text{Ec} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \text{Ec} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 -$$

$$- \alpha \beta \text{Ec} n_s \mu (u - u_s)^2 \Psi_{st} - \frac{2}{3} \alpha \beta \frac{1}{\text{Pr}} n_s \lambda (T - T_s) \Psi_h,$$

$$\frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial y} = 0, \quad (2.1.9)$$

$$\left(u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) = \beta \mu (u - u_s) \Psi_{st},$$

$$\rho_s \left(u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = \beta \mu (v - v_s) \Psi_{st} + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta \sqrt{\mu \rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| (u - u_s) \mathbf{j} \Psi_{saf} - \omega,$$

$$\left(u_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) = \frac{2}{3} \chi \beta \frac{1}{\text{Pr}} \lambda (T - T_s) \Psi_h.$$

Здесь все величины представлены уже в безразмерном виде, а в качестве масштабов при обезразмеривании использованы характерные масштабы длин, скоростей фаз, плотности, вязкости, теплопроводности несущей фазы и концентрации частиц: L_0 , U_0 , $L_0/\sqrt{\text{Re}}$, $U_0/\sqrt{\text{Re}}$, ρ_0 , μ_0 , λ_0 и n_{s0} соответственно.

Полученные уравнения содержат следующие безразмерные определяющие параметры:

$$\text{Ec} = \frac{U_+^2}{c_p T_+^*}, \quad \alpha = \frac{m n_{s0}}{\rho_0}, \quad \beta = \frac{6 \pi \sigma \mu_0 L_0}{m U_0}, \quad \zeta, \quad \chi = \frac{c_p}{c_s}, \quad \omega = \frac{g L_0}{U_0^2} \sqrt{\text{Re}}.$$

Здесь Ec – число Эккерта, α – относительная массовая концентрация частиц, β – параметр, характеризующий инерционные свойства частиц и равный отношению макромасштаба длины задачи к длине скоростной релаксации фаз: чем меньше значение β , тем частица более инерционная, ζ – безразмерный коэффициент при подъемной силе (его выражение зависит от конкретного выражения для подъемной силы, поэтому выражения для ζ будут приведены отдельно в каждом рассматриваемом случае), χ – отношение теплоемкостей вещества частиц и несущей фазы, ω определяет вклад силы тяжести.

Следует отметить, что уравнения двухфазного пограничного слоя выписаны с использованием эйлера подхода, который предполагает отсутствие

пересечений траекторий частиц и однозначность всех полевых параметров дисперсной фазы. В работе будет рассмотрен ряд течений, в которых это предположение нарушается и происходят множественные пересечения траекторий частиц. При этом модель несталкивающихся частиц, как правило, остается применимой и в зонах пересечения траекторий дисперсных включений, и в локальных областях накопления частиц. Соответствующие оценки для типичных значений объемных концентраций и размеров частиц приведены в (Осипцов, 1984) [25]. Для описания течений с пересекающимися траекториями частиц будет использоваться полный лагранжев подход (Osipov, 2000) [87], позволяющий успешно преодолевать трудности, связанные с возникновением “сладоков” и “сборок” фазового объема дисперсной фазы.

Частицы, движущиеся по пересекающимся траекториям, приходят в точку пересечения в разные моменты времени, поэтому при малых средних объемных концентрациях частиц их столкновений не происходит. Подсчитывая среднее число частиц в трубке, радиус которой равен диаметру частицы, а длина равна характерной длине области пересекающихся траекторий частиц \tilde{l} , легко показать, что для достаточно малых объемных концентраций частиц τ вероятность столкновения частиц мала при $\tau \ll \sigma/\tilde{l}$.

В случаях конечной массовой концентрации $\alpha \sim 1$ решение уравнений типа (2.1.8), описывающих течения с обратным влиянием частиц на несущую фазу, обычно проводится итерациями по источниковым членам, учитывающим влияние дисперсной фазы на несущую фазу. При этом на каждом итерационном шаге поле скоростей несущей фазы считается известным, и требуется найти параметры дисперсной среды.

Предположение о малой массовой концентрации $\alpha \ll 1$ позволяет искать скорости несущей фазы независимо от движения частиц. Параметры дисперсной фазы по известному полю скорости несущей фазы затем находятся из уравнений типа (2.1.9).

2.2 Полный лагранжев метод

Для расчета параметров дисперсной фазы в течениях с пересекающимися траекториями частиц используется полный лагранжев метод (Осипцов, 1998, 2000, 2008) [28, 86, 87], позволяющий находить все параметры среды частиц (включая числовую концентрацию) вдоль выбранных траекторий движения частиц. Такой подход оказывается очень эффективным в течениях со “складками” и “сборками” фазового объема среды частиц.

Изложим кратко основные идеи метода на примере описания течения дисперсной смеси с заданным полем скорости и температуры несущей фазы и стоксовской силой межфазного взаимодействия в декартовых координатах. Выберем в качестве лагранжевых координат значения декартовых координат частицы (x_0, y_0, z_0) в некоторый момент времени $t = 0$, принятый за начало отсчета. В лагранжевых координатах уравнения движения, энергии и неразрывности из (2.1.9) примут вид:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s), \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{2}{3}\chi\beta\frac{1}{\text{Pr}}\lambda(T - T_s), \quad n_s(\mathbf{r}_0, t) |J_{ij}| = n_s(\mathbf{r}_0, 0). \quad (2.2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $|J_{ij}|$ – модуль якобиана матрицы перехода от эйлеровых координат к лагранжевым с компонентами $J_{ij} = \partial x_i / \partial x_{0j}$; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3, что отвечает проекциям на оси x, y и z соответственно. Предполагается, что x_i и v_{si} – функции времени и лагранжевых координат.

После дифференцирования первых двух векторных уравнений (2.2.1) по лагранжевым координатам x_{0j} и изменения порядка дифференцирования получаем систему уравнений для определения компонент якобиана J_{ij}

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial t} = \Omega_{ij}, \quad \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} = \beta \left(\sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} J_{kj} - \Omega_{ij} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial v_{si}}{\partial x_{j0}}. \quad (2.2.2)$$

Поскольку компоненты скорости несущей фазы v_i , а, значит, и их производные по эйлеровым координатам $\partial v_i / \partial x_k$ известны, то уравнения (2.2.1) – (2.2.2) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных урав-

нений для вычисления скоростей и температуры дисперсной фазы, а также компонент якобиана вдоль траектории движения частицы с фиксированными начальными координатами (x_0, y_0, z_0) . При этом числовая концентрация находится из алгебраического соотношения (2.2.1).

Начальные условия для системы (2.2.1) – (2.2.2) естественным образом следуют из граничных условий задачи в эйлеровых координатах

$$t = 0 : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s(\mathbf{r}_0), \quad J_{ii} = 1, \quad J_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial v_{si}}{\partial x_j}(\mathbf{r}_0).$$

В общем случае для трехмерного течения система (2.2.1) – (2.2.2) состоит из 24 уравнений, для плоского двумерного течения – из 12. В случае стационарного течения, воспользовавшись стационарностью траекторий частиц, можно существенно понизить порядок системы, выразив часть компонентов J_{ij} через компоненты скорости частиц. Для стационарной траектория частицы $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ верно следующее соотношение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t + dt) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{l}_0, t), \quad d\mathbf{l}_0 = \mathbf{v}_0 dt. \quad (2.2.3)$$

Здесь $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_s(\mathbf{r}_0)$ – скорость частиц в точке \mathbf{r}_0 . Учитывая соотношение (2.2.3), получаем следующее выражение для производной вектора \mathbf{r} вдоль лагранжева направления \mathbf{l}_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{l}_0}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}_s}{v_0}, \quad v_0 = |\mathbf{v}_0|.$$

Отсюда получаем ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{v_{si}}{v_0} = \frac{\partial x_i}{\partial x_0} n_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_0} n_2 + \frac{\partial x_i}{\partial z_0} n_3, \quad n_i = \cos(\mathbf{v}_0, \mathbf{e}_i). \quad (2.2.4)$$

Здесь \mathbf{e}_i – единичные векторы осей координат. Из трех соотношений (2.2.4) можно выразить компоненты якобиана, что позволяет сократить систему (2.2.1) – (2.2.2) на шесть уравнений.

Глава 3. Поперечная миграция инерционной примеси в пограничном слое на плоской стенке. Сравнение расчетов с экспериментом и анализ применимости модели.

Данная глава посвящена анализу применимости модели двухфазного пограничного слоя с учетом сил Сэфмана для описания известных экспериментальных данных по распределению примеси в пристеночных течениях запыленного газа (Hussainov и др., 1994) [60] и разреженной суспензии (Lee, 1982) [68]. В (Hussainov и др., 1994) [60] получены профили концентрации частиц в существенно дозвуковом течении запыленного газа вдоль вертикально расположенной пластины. В (Lee, 1982) [68] экспериментально изучалось распределение частиц в течении жидкости с примесью твердых частиц вдоль горизонтальной пластины. Обе экспериментальные работы показывают, что вблизи стенки концентрация частиц уменьшается. В первой работе отношение плотностей несущей фазы и вещества частиц много меньше единицы. В таком случае движение частиц определяется лишь силой тяжести, силой аэродинамического сопротивления и силой Сэфмана. Постановка задачи во многом аналогична той, которая рассматривалась в (Осипцов, 1988) [27]; отличие состоит в учете силы тяжести, поддерживающей рассогласование скоростей фаз и, тем самым, усиливающей действие силы Сэфмана. В (Lee, 1982) [68] исследовалось течение суспензии, в которой плотности жидкой и твердой фаз имеют одинаковый порядок. Для описания этого эксперимента предложена модифицированная модель двухфазного пограничного слоя, в которой в межфазном обмене импульсом, помимо указанных выше сил, учитываются также силы Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска.

Итак, рассматривается плоская задача о стационарном течении газа (жидкости) с примесью твердых частиц в пограничном слое на плоской стенке. Задача решается в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Несущая фаза – несжимаемая жидкость плотности ρ и вязкости μ . Дисперсные включения – одинаковые сферические частицы радиуса σ , массы m , ρ_{sm} – плотность вещества частиц; тензор напряжений в среде частиц отсутствует. Влиянием частиц на несущую фазу пренебрегается. В межфазном обмене импульсом в общем случае учитываются сила аэродинамического сопротивления, подъемная сила, сила Архимеда, сила присоединенных масс и сила Бассэ-Буссинеска.

Вводится декартова система координат, ось x направлена вдоль стенки, начало координат находится на передней кромке пластины. Система уравнений для обеих фаз в эйлеровых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}^* &= 0, \quad \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s^* = 0, \\ (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}^*, \\ m (\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) \mathbf{v}_s^* &= \mathbf{f}_s^*, \end{aligned}$$

Выражение для силы \mathbf{f}_s^* , действующей на одну частицу, имеет вид (Махеу, Riley, 1983) [77]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s^* &= \mathbf{f}_{st}^* + \mathbf{f}_A^* + \mathbf{f}_{vm}^* + \mathbf{f}_{BB}^* + \mathbf{f}_L^* + m \mathbf{g}, \quad (3.1) \\ \mathbf{f}_{st}^* &= 6\pi\sigma\mu (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*) \left(1 + \frac{1}{6} \operatorname{Re}_s^{2/3} \right), \\ \mathbf{f}_L^* &= 6.46\sigma^2 \sqrt{\mu\rho} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} (u^* - u_s^*) \mathbf{j} \Psi_{saf}, \\ \mathbf{f}_A^* &= \frac{4}{3} \pi \sigma^3 \rho \left(\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt} - \mathbf{g} \right), \\ \mathbf{f}_{vm}^* &= \frac{2}{3} \pi \sigma^3 \rho \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt} \right), \\ \mathbf{f}_{BB}^* &= 6\sigma^2 \sqrt{\pi\mu\rho} \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{v}^*}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s^*}{dt} \right) \Big|_{t=t_1} \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}, \end{aligned}$$

$$\Psi_{saf} = 0.4687 (1 - \exp(-0.1\text{Re}_s)) \left(\frac{\text{Re}_g}{\text{Re}_s} \right)^{1/2} + \exp(-0.1\text{Re}_s) \quad (\text{Re}_s < 40),$$

$$\Psi_{saf} = 0.0741\text{Re}_g^{1/2} \quad (\text{Re}_s > 40),$$

$$\text{Re}_s = \frac{2\sigma\rho|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*|}{\mu}, \quad \text{Re}_g = \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right| \frac{\sigma^2\rho}{\mu}.$$

Здесь d/dt и D/Dt обозначают, соответственно, субстанциональные производные вдоль траекторий твердой частицы и частицы несущей фазы; \mathbf{g} – ускорение свободного падения. \mathbf{f}_{st}^* , \mathbf{f}_L^* , \mathbf{f}_A^* , \mathbf{f}_{vm}^* , \mathbf{f}_{BB}^* – сила аэродинамического сопротивления, подъемная сила, сила Архимеда, сила присоединенных масс и сила Бассэ-Буссинеска. Выражения для силы аэродинамического сопротивления и подъемной силы взяты в формах, предложенных в работах (Carlson, Noglund, 1964; Mei, 1992) [44, 80], учитывающих конечные значения чисел Рейнольдса обтекания частиц.

Параметры задачи приведем к безразмерному виду следующим образом (звездочкой обозначены размерные величины):

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}\sqrt{\text{Re}}, \quad u = \frac{u^*}{U_0}, \quad v = \frac{v^*}{U_0}\sqrt{\text{Re}},$$

$$u_s = \frac{u_s^*}{U_0}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{U_0}\sqrt{\text{Re}}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s0}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{LU}{\nu},$$

где L – характерная длина задачи, U_0 – скорость набегающего потока.

Так как влиянием частиц на несущую фазу пренебрегается, поля параметров несущей фазы в погранслоном приближении находятся из решения задачи Блазиуса для чистого газа. Параметры дисперсной фазы находятся с помощью лагранжева подхода, который позволяет вычислять все параметры частиц, включая концентрацию, вдоль выбранных траекторий. Это делает возможным исследовать течения с множественными пересечениями траекторий частиц и локальными зонами накопления дисперсной фазы. В случае течения суспензии, когда траектории частиц не пересекаются, концентрация определяется с помощью рассмотрения трубок тока дисперсной фазы. Следуя большинству работ по обтеканию поверхностей двухфазной средой, частицы,

выпавшие на стенку, в дальнейшем расчете не учитываются, что может соответствовать формированию на стенке очень тонкого слоя накопления частиц (толщина этого слоя имеет порядок размера частиц и, поэтому, он не оказывает влияние на течение в основной части пограничного слоя).

Движение частиц определяется следующими безразмерными параметрами (выражение в скобках приведено для случая, когда сила тяжести направлена вдоль стенки):

$$D_\rho = \frac{\rho}{\rho_{sm}}, \quad \beta = \frac{L}{l_\tau}, \quad \text{Re}_{2\sigma} = \frac{2\rho\sigma U_0}{\mu}, \quad \omega = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\text{Fr}^2} = \sqrt{\text{Re}} \frac{gL}{U_0^2} \left(\frac{gL}{U_0^2} \right).$$

Параметр при подъемной силе выражается через независимые параметры следующим образом:

$$\zeta = 0.0832 \text{Re}_{s0}^{3/2} \left(\frac{\rho}{\rho_{sm}} \right)^{-1/4} \beta^{5/4}.$$

Выражения для текущих чисел Рейнольдса обтекания частиц таковы:

$$\text{Re}_s = \text{Re}_{s0} |u - u_s|, \quad \text{Re}_g = \text{Re}_{s0} \sqrt{18 \frac{D_\rho}{\beta} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}.$$

3.1 Течение запыленного газа в пограничном слое у вертикальной пластины

В данном разделе с целью “валидации” использованной модели двухфазного пограничного слоя проведены расчеты течения в условиях, близких эксперименту (Hussainov и др., 1994) [60], где экспериментально исследовалось течение запыленного газа вдоль вертикальной пластины. Несущая фаза – воздух, включения – твердые сферические частицы плотности 3.95 г/см^3 , радиус частиц 32 мкм , отклонение от данного размера частиц может достигать 30% . Длина пластины – 50 см , скорость набегающего потока – 150 см/с . Сечения, в которых проводились измерения: $x_1^* = 5 \text{ см}$, $x_2^* = 10 \text{ см}$, $x_3^* = 17 \text{ см}$. При таких параметрах эксперимента в качестве масштаба длины при обезразмеривании можно выбрать длину скоростной релаксации частиц при

стоксовском законе сопротивления, т.е. положить $\beta = 1$. Так как отношение плотностей воздуха и вещества частиц много меньше единицы, вместо D_ρ включим в набор определяющих параметров параметр при подъемной силе ζ . Безразмерные параметры принимают значения: $\text{Re}_{s0} = 3.36$; $\omega = 0.0855$, $\zeta = 3.88$. Так как $D_\rho \ll 1$, действием сил Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска будем пренебрегать (см. соответствующие коэффициенты в системе уравнений (3.2.1)). В таком случае уравнения движения частиц существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s, \\ \frac{du_s}{dt} &= (u - u_s) \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_{s0}^{2/3} |u - u_s|^{2/3} \right) + \omega, \\ \frac{dv_s}{dt} &= (v - v_s) \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_{s0}^{2/3} |u - u_s|^{2/3} \right) + \zeta (u - u_s) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \Psi_{saf}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Концентрация частиц определяется с помощью полного лагранжева подхода, использующего лагранжеву форму уравнения неразрывности дисперсной фазы:

$$\begin{aligned} n_s(0, y_0) \cdot u_s(0, y_0) &= n_s(t, y) \cdot \left| u_s \frac{\partial y(t, y_0)}{\partial y_0} - v_s \frac{\partial x(t, y_0)}{\partial y_0} \right|, \\ \frac{de_1}{dt} &= e_3, \quad \frac{de_2}{dt} = e_4, \\ \frac{de_3}{dt} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2 - e_3 \right) \left(1 + \frac{5}{18} \text{Re}_{s0}^{2/3} (u - u_s)^{2/3} \right), \\ \frac{de_4}{dt} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} e_1 + \frac{\partial v}{\partial y} e_2 - e_4 \right) \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_{s0}^{2/3} |u - u_s|^{2/3} \right) + \\ &+ \frac{1}{9} \text{Re}_{s0}^{2/3} \frac{v - v_s}{\sqrt[3]{u - u_s}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2 - e_3 \right) + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2 - e_3 \right) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \Psi_{saf} + \\ &+ \frac{1}{2} \zeta (u - u_s) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e_1 \right) \Psi_{saf} + \zeta (u - u_s) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{saf}}{\partial y_0}}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Начальные условия для этой системы таковы:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad u_s = u_{s0}, \quad v_s = 0, \quad n_s = 1, \quad (3.1.3)$$

$$e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = 0, e_4 = 0.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1.1) – (3.1.2) с начальными условиями (3.1.3) решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности на выбранных траекториях частиц. При этом параметры несущей фазы вычислялись с помощью интерполяции табличных значений функции Блазиуса, посчитанной в автомодельных эйлеровых переменных.

Заметим, что в эксперименте не контролировалось начальное рассогласование скоростей фаз и имелся разброс частиц по размерам, поэтому расчеты проводились для различных начальных рассогласований скоростей фаз и слегка варьировался размер частиц. На Рис. 3.1 представлены траектории частиц, некоторые результаты расчетов для профилей концентрации частиц приведены на Рис. 3.2 – 3.4. В расчетах было положено $Re_{s0} = 3.36$; $\omega = 0.0855$, $\zeta = 3.88$, $u_{s0} = 0.35$, что соответствует условиям эксперимента (Hussainov и др., 1994) [60]; профили построены в сечениях $x_1 = 2.55$ (5 см), $x_2 = 5.1$ (10 см), $x_3 = 8.7$ (17 см). Для удобства сравнения результатов численного моделирования и эксперимента концентрация частиц отнесена к ее значению во внешнем потоке вдали от стенки, а поперечная координата отнесена к местной толщине пограничного слоя. Частицы, которые начинают движение вблизи стенки (на расстоянии порядка 0.1 и меньше), не рассматриваются, так как расстояние от стенки до центра частицы должно быть больше ее радиуса. В данном случае, когда значения определяющих параметров соответствуют эксперименту, частицы движутся по направлению от стенки, в рассматриваемой области течения частицы не выпадают на стенку (см. Рис. 3.1). При других значениях определяющих параметров траектории частиц могут пересекаться, а также частицы могут оседать на стенку.

Пунктирными линиями на Рис. 3.2 приведены профили концентрации частиц, посчитанные без учета подъемных сил Сэфмана. Видно, что без учета подъемной силы концентрация частиц неограниченно возрастает с прибли-

жением к стенке, что совпадает с модельным расчетом (Осипцов, 1980) [24].

Учет влияния боковой силы, действующей на частицы в сдвиговом потоке, приводит к качественному изменению профиля концентрации частиц – при приближении к стенке концентрация частиц уменьшается. На Рис. 3.3 приведено сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных. Получено вполне удовлетворительное качественное совпадение профилей концентрации частиц: при приближении к стенке концентрация частиц убывает, а на некотором расстоянии от стенки профиль концентрации имеет локальный максимум. В численных расчетах локальный максимум концентрации внутри пограничного слоя постепенно исчезает ниже по потоку. Некоторое количественное различие в результатах может быть объяснено тем, что в эксперименте использовались полидисперсные частицы. На Рис. 3.4 приведено сравнение профилей концентрации частиц диаметра 32 мкм и частиц, размер которых на 30% больше (соответствующие профили обозначены пунктирной линией). Для них значение максимума в каждом сечении больше. На основании проведенных расчетов можно заключить, что использованная модель двухфазного пограничного слоя с учетом силы Сэфмана вполне пригодна для описания поперечной миграции частиц в пограничных слоях в запыленных газах и аэрозолях.

3.2 Течение суспензии в пограничном слое на горизонтальной пластине

В (Lee, 1982) [68] экспериментально исследовалось течение разреженной смеси “вода – стеклянные частицы” вдоль пластины длиной $L = 244$ см. Скорость набегающего потока – 40 – 50 см/с. Точная плотность вещества стеклянных частиц, использованных в эксперименте, не указана авторами [68], поэтому в наших расчетах плотность частиц варьировалась в диапазоне – 1 – 2 г/см³, диаметр частиц – 100 мкм. Сечения, при которых проводились измерения: $x_1^* = 2.5$ см, $x_2^* = 5$ см, $x_3^* = 7.5$ см.

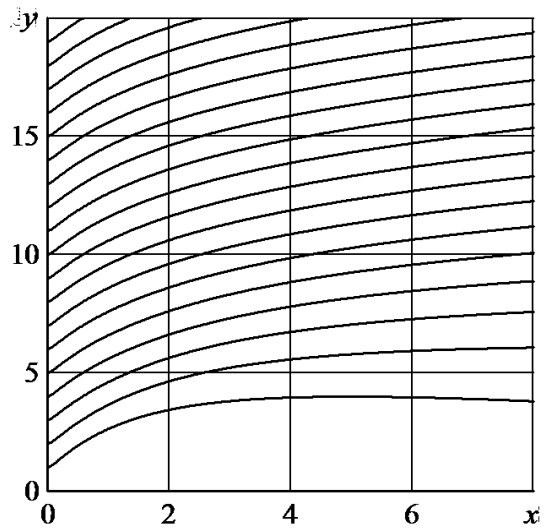


Рис. 3.1: Траектории частиц диаметра 32 мкм при $Re_{s0} = 3.36$; $\omega = 0.0855$, $\zeta = 3.88$, $u_{s0} = 0.35$

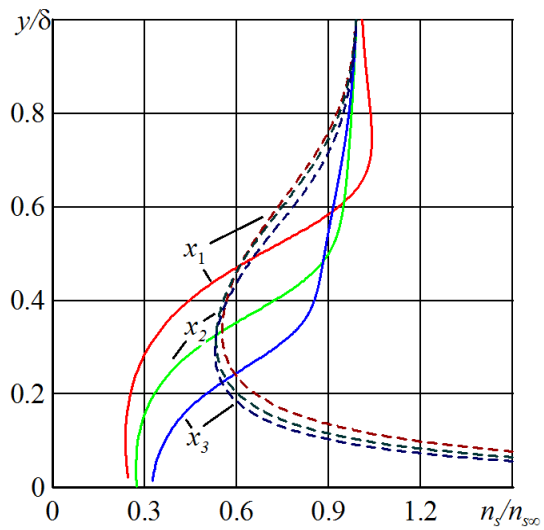


Рис. 3.2: Профили концентрации частиц диаметра 32 мкм в сечениях x_1 , x_2 , x_3 , пунктирная линия – профили концентрации частиц без учета поперечной силы.

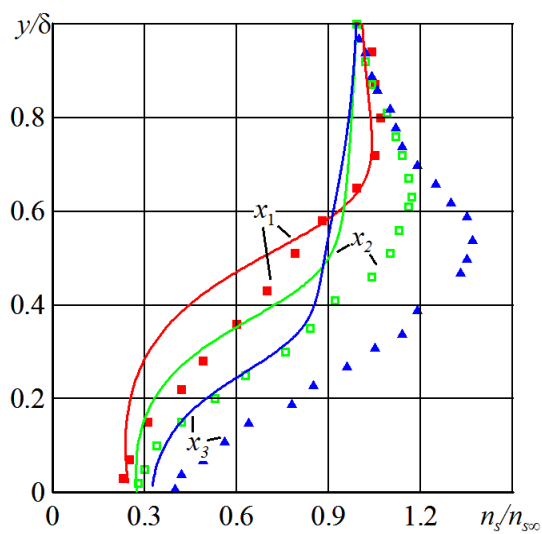


Рис. 3.3: Профили концентрации частиц диаметра 32 мкм в сечениях x_1 , x_2 , x_3 , точками обозначены результаты эксперимента (Hussainov и др., 1994) [60] в тех же сечениях.

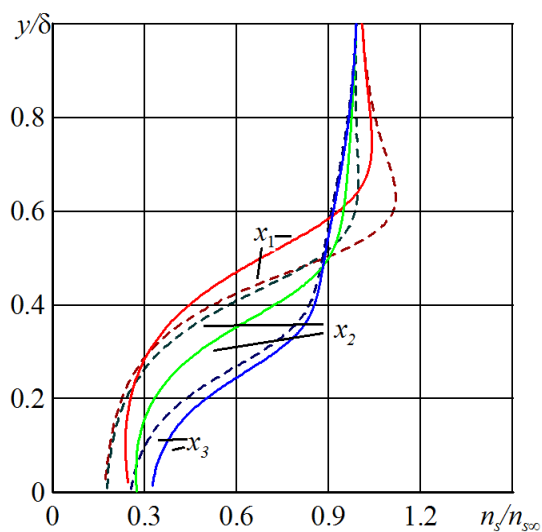


Рис. 3.4: Профили концентрации частиц диаметра 32 мкм в сечениях x_1 , x_2 , x_3 , пунктирные линии – профили концентрации частиц, диаметр которых на 30% больше.

В таблице приведены значения определяющих параметров при $U_0 = 50$ см/с, $Re_{s0} = 100$, $\omega = 1.05 \cdot 10^5$.

Таблица значений определяющих параметров

D_ρ	β	ζ
1	2200	$1.2 \cdot 10^6$
0.91	2000	$1.1 \cdot 10^6$
0.77	1700	10^6

В данной задаче трудно надеяться на хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных, поскольку плотности фаз близки, рассогласование скоростей фаз, а, следовательно, и числа Рейнольдса обтекания частиц могут быть очень малы, что делает проблематичным использование локального выражения для подъемной силы в форме Сэфмана. Кроме того, в данном случае необходимо учитывать все нестационарные составляющие межфазной силы, поскольку формально они имеют одинаковый порядок малости. В то же время, различие между субстанциональными производными вдоль траекторий твердой частицы и частицы несущей фазы несущественно в силу того, что числа Рейнольдса обтекания частиц малы, а параметр инерционности β велик. Поэтому уравнения движения частиц можно переписать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s, \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} = & \frac{2}{2 + D_\rho} \beta (u - u_s) \left(1 + \frac{1}{6} Re_{s0}^{2/3} |u - u_s|^{2/3} \right) + \frac{3D_\rho}{2 + D_\rho} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ & + \sqrt{\frac{9}{2\pi}} \frac{2}{2 + D_\rho} \sqrt{\beta D_\rho} \int_0^t \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{du_s}{dt} \right) \Big|_{t=t_1} \frac{dt_1}{\sqrt{t - t_1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} = & \frac{2}{2 + D_\rho} \left[\beta (v - v_s) \left(1 + \frac{1}{6} Re_{s0}^{2/3} |u - u_s|^{2/3} \right) + \zeta (u - u_s) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \Psi_{saf} \right] - \\ & - \frac{2}{2 + D_\rho} (1 - D_\rho) \omega + \frac{3D_\rho}{2 + D_\rho} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \end{aligned}$$

$$+\sqrt{\frac{9}{2\pi}}\frac{2}{2+D_\rho}\sqrt{\beta D_\rho}\int_0^t\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{dv_s}{dt}\right)\Big|_{t=t_1}\frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}.$$

Здесь t – безразмерное время движения частицы вдоль траектории (масштаб при обезразмеривании времени L/U_0). Начальные условия:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad u_s = u_{s0}, \quad v_s = 0, \quad n_s = 1. \quad (3.2.2)$$

В данном случае скоростное рассогласование фаз мало, и не возникает пересечений траекторий частиц. Поэтому концентрация частиц определяется из условия сохранения потока дисперсной фазы в трубке тока. Для двумерного случая, это условие принимает вид:

$$n_{s0}u_{s0}\Delta y_0 = n_s u_s \Delta y. \quad (3.2.3)$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (3.2.1) с начальными условиями (3.2.2) решалась численно. Несобственный интеграл в выражении для силы Бассэ-Буссинеска разбивается на две части – с особенностью и без нее. В первой части интегрирование ведется от 0 до $t - \varepsilon$, во второй – в ε -окрестности точки t . Данный алгоритм вычисления наследственной силы Бассэ-Буссинеска был предложен и апробирован в работе (Невский, Осипцов, 2008) [22]. При вычислении концентрация частиц с помощью трубок тока дисперсной фазы (3.2.3) использовалась интерполяция параметров частиц полиномами второго порядка. Как и в предыдущем разделе, частицы, достигающие стенки, далее исключаются из расчета, что может соответствовать формированию на стенке слоя осадка, толщина которого незначительна.

Некоторые результаты расчетов приведены на Рис. 3.5 – 3.7. В расчетах было положено: $U_0 = 50$ см/с, $Re_{s0} = 100$, $\omega = 1.05 \cdot 10^5$, $D_\rho = 0.77$, $x_1 = 0.01$ (2.5 см), $x_2 = 0.02$ (5 см), $x_3 = 0.03$ (7.5 см), $u_{s0} = 1$. На Рис. 3.5, 3.6 показано развитие профилей продольной и поперечной компонент скорости дисперсной фазы (пунктирной линией обозначены профили соответствующих компонент скорости несущей фазы) в зависимости от автомодельной

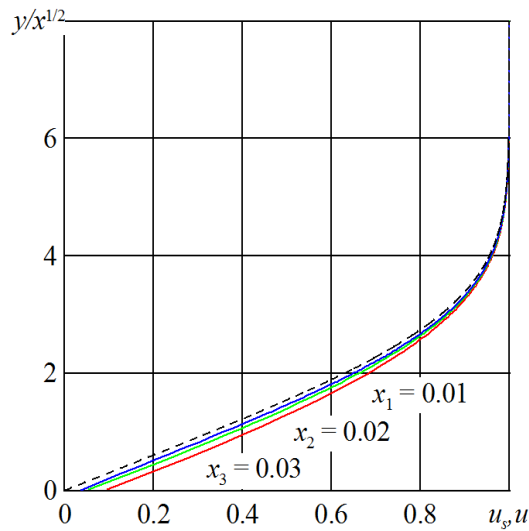


Рис. 3.5: Профили продольной компоненты скорости частиц диаметра 100 мкм в сечениях x_1 , x_2 , x_3 , пунктирная линия – профиль продольной компоненты скорости несущей фазы.

переменной Блазиуса y/\sqrt{x} . В силу того, что частицы малоинерционны (параметр β принимает большие значения), величина продольной компоненты скорости частиц в рассматриваемых сечениях близка к значениям продольной скорости несущей фазы. На начальном участке движение частиц определяется действием подъемной силы – частицы движутся вверх, далее под действием силы тяжести, они меняют направление движения и движутся к стенке. На Рис. 3.7 показаны рассчитанные профили концентрации частиц, приведено сравнение результатов численного моделирования (сплошные линии) и эксперимента (точки). Заметим, что в данном случае получено не очень хорошее согласование расчетов и экспериментов, причем при уменьшении задаваемой разности плотностей фаз расчеты все далее расходятся с экспериментом. Проведенные расчеты подтверждают ожидаемый результат – с уменьшением рассогласования скоростей фаз подъемная сила начинает зависеть не только от главной (линейной) части неоднородности потока на масштабе частицы, но и от других факторов. В то же время, при конечных различиях плотностей фаз качественные особенности поперечной миграции частиц в пограничных слоях можно описывать с помощью предложенной в данном разделе модели двухфазного пограничного слоя.

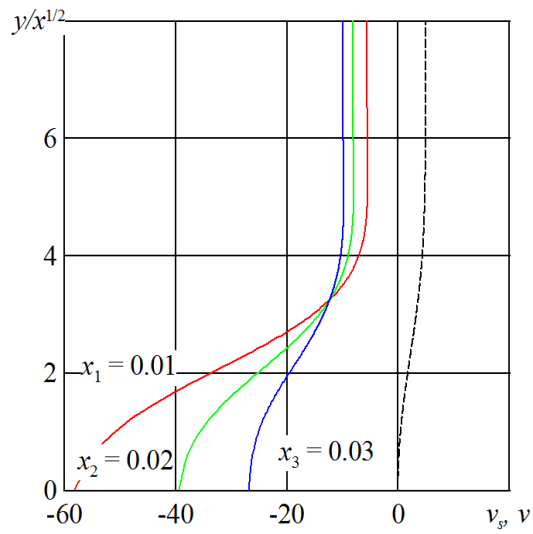


Рис. 3.6: Профили поперечной компоненты скорости частиц диаметра 100 мкм в сечениях x_1, x_2, x_3 , пунктирная линия – профиль поперечной компоненты скорости несущей фазы.

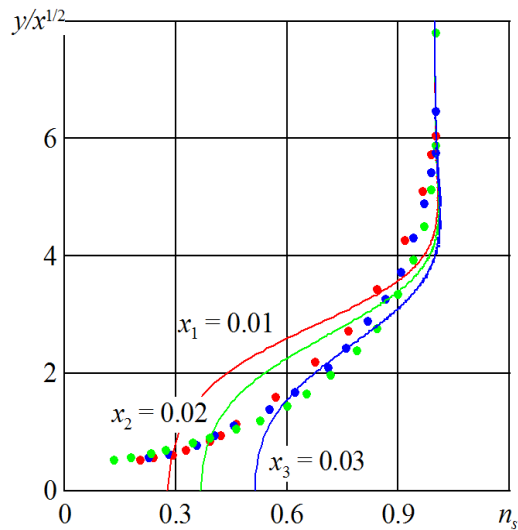


Рис. 3.7: Профили концентрации частиц диаметра 100 мкм в сечениях $x_1, x_2, x_3, D_p = 0.77$, точками обозначены результаты эксперимента (Lee, 1982) [68] в тех же сечениях

Выводы

В рамках модели двух взаимопроникающих континуумов решены задачи о течении газа (жидкости) с примесью твердых частиц в пограничном слое на плоской пластине в случае, когда массовая доля частиц пренебрежимо мала. В первой задаче рассматривается течение запыленного газа вдоль вертикальной пластины, во второй – течение жидкости с примесью твердых частиц вдоль горизонтальной пластины. В первом случае, когда плотность вещества частиц много больше плотности несущей фазы, поведение частиц определяется лишь силами аэродинамического сопротивления и Сэфмана. Во второй задаче отношение плотностей несущей фазы и вещества частиц порядка единицы, поэтому, помимо силы аэродинамического сопротивления и подъемной силы, в межфазном обмене импульсом учитываются сила Архимеда, сила присоединенных масс и сила Бассе-Буссинеска. Проведено параметрическое численное исследование профилей концентрации дисперсной фазы, формирующихся в пограничном слое. Получено качественное совпадение рассчитанных профилей концентрации частиц экспериментальным данным. Показано, что учет поперечной силы правильно описывает экспериментальные эффекты локальных максимумов концентрации частиц внутри пограничного слоя и уменьшения концентрации вблизи стенки. Некоторые количественные расхождения численных и экспериментальных результатов могут быть объяснены отсутствием полной информации о значениях параметров проведенных экспериментов (начальные рассогласования скоростей фаз, распределение частиц по размеру и проч.). С уменьшением разности плотностей фаз согласие теории и эксперимента ухудшается.

Глава 4. Пристенная двухфазная ламинарная струя

В данной главе решается задача о двухфазной струе, распространяющейся вдоль плоской стенки. Такое течение может сформироваться при истечении запыленного газа из узкой щели, расположенной у стенки, или при натекании струи жидкости с частицами на стенку. Предполагается, что несущая фаза – вязкая несжимаемая жидкость. Струя вытекает в пространство, заполненное тем же газом, что и несущая фаза струи. Вследствие трения струя захватывает некоторую часть покоящегося газа и увлекает его за собой. Физическая плотность вещества частиц значительно превосходит плотность газа $\rho_{sm} \gg \rho$. В таких условиях движение частиц определяется действием силы Стокса и силы Сэфмана.

4.1 Постановка задачи о пристенной ламинарной двухфазной струе

Рассматривается стационарная плоская задача о течении запыленного газа в затопленной пристенной струе. Задача решается в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Несущая фаза – несжимаемая жидкость плотности ρ и вязкости μ . Дисперсные включения – одинаковые сферические частицы радиуса σ , массы m , ρ_{sm} – плотность вещества частиц; тензор напряжений в среде частиц отсутствует. Влиянием частиц на несущую фазу пренебрегается. Физическая плотность вещества частиц значительно превосходит плотность газа $\rho_{sm} \gg \rho$. В межфазном обмене импульсом учитываются сила Стокса и сила Сэфмана.

Введем декартову систему координат на плоскости таким образом, что ис-

точник струи находится в начале координат, ось x направлена вдоль стенки. Система уравнений для обеих фаз имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}^* &= 0, \quad \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s^* = 0, \\ (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}^* + \frac{1}{\rho} n_s^* \mathbf{f}_s^*, \\ m (\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) \mathbf{v}_s^* &= \mathbf{f}_s^*. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Сила, действующая со стороны несущей фазы на единицу массы частицы, имеет вид:

$$\mathbf{f}_s^* = 6\pi\sigma\mu (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*) + \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) 6.46\sigma^2 \sqrt{\mu\rho} \sqrt{\left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|} (u^* - u_s^*) \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} – единичный вектор оси y .

Так как движение жидкости происходит внутри узкой области вблизи оси x , где существенна вязкость, а на бесконечности газ покоится, для описания течения в струе можно использовать приближение пограничного слоя. Обезразмерим уравнения системы (4.1.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L} \sqrt{\operatorname{Re}}, \quad u = \frac{u^*}{U_0}, \quad v = \frac{v^*}{U_0} \sqrt{\operatorname{Re}}, \\ u_s &= \frac{u_s^*}{U_0}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{U_0} \sqrt{\operatorname{Re}}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s\infty}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho U^2}, \quad \operatorname{Re} = \frac{LU}{\nu}, \end{aligned}$$

где L – характерная длина задачи, U_0 – скорость набегающего потока, $n_{s\infty}$ – характерное значение числовой концентраций частиц. Характерные параметры L и U будут определены позже.

В рассматриваемой задаче газ во внешнем течении покоится, поэтому давление постоянно. Переходя к пределу $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$, получим уравнения двухфазной среды в приближении пограничного слоя (система (2.1.8) – (2.1.9) с учетом того, что несущая фаза несжимаема, с постоянной вязкостью):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha\beta n_s (u - u_s), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial n_s v_s}{\partial y} &= 0, \\ u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} &= \beta(u - u_s),\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned}u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} &= \beta(v - v_s) + \zeta \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (u - u_s) \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}, \\ \alpha &= \frac{m n_{s\infty}}{\rho}, \quad \beta = \frac{L}{l_\tau} = \frac{6\pi\sigma\mu L}{mU}, \quad \zeta = 6.46 \frac{\sigma^2 L \rho \operatorname{Re}^{1/4}}{m} = 1.54 \frac{L}{\sigma} \frac{\rho}{\rho_{sm}} \operatorname{Re}^{1/4}.\end{aligned}$$

Граничные условия для несущей фазы таковы:

$$y = 0 : u = 0, v = 0,$$

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow 0.$$

Граничные условия для параметров дисперсной фазы будут обсуждаться в разделе 4.3 настоящей главы.

Система уравнений (4.1.1) – (4.1.2) состоит из пяти уравнений с тремя безразмерными параметрами α , β , ζ при членах, описывающих влияние сил Стокса и Сэфмана. Из определения параметра β видно, что его можно принять равным единице, если положить характерную длину L равной длине скоростной релаксации фаз $l_\tau = mU/(6\pi\sigma\mu)$. При этом

$$\zeta = \frac{0.26}{\pi} \left(\frac{\rho_{sm}}{\rho} \right)^{1/4} \operatorname{Re}_{s0}^{3/2},$$

где $\operatorname{Re}_{s0} = 2\sigma U/\nu$ – число Рейнольдса обтекания частицы. Типичные значения массовой концентрации частиц $\alpha \leq O(1)$. Значение α уменьшается с уменьшением числовой концентрации частиц и увеличением плотности несущей фазы. Коэффициент ζ может быть порядка единицы и более, значение ζ увеличивается с увеличением размера частиц.

В разделе 4.2 этой главы будет показано, что для аналогичной задачи для чистого газа имеет место интеграл, сохраняющий свое значение вдоль оси x .

$$E = \int_0^\infty u^2 \left(\int_0^y u ds \right) dy = \text{const.}$$

Без ограничения общности значение константы в правой части можно принять равной $1/40$, что позволяет представить решение в наиболее компактном виде (см. раздел 4.2 настоящей главы). Тогда

$$E^* = U^2 L \nu E = U^2 L \nu / 40.$$

Следовательно, можно положить $U = \sqrt{40E^*/L\nu}$, $L = mU/6\pi\sigma\mu$. Откуда следует, что

$$U = \left(\frac{240\pi\sigma\rho E^*}{m} \right)^{1/3}, \quad L = \left(\frac{240E^*\pi\sigma\rho}{m} \right)^{1/3} \frac{m}{6\pi\sigma\mu}.$$

Рассмотрен случай малой массовой концентрации частиц, когда можно пренебречь влиянием частиц на несущую фазу (принять $\alpha = 0$ в системе уравнений (4.1.2) – (4.1.3)) и воспользоваться при нахождении скоростей несущей фазы решением аналогичной задачи для однофазной среды. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки впервые было рассмотрено Н.И. Акатновым (1953) [1] и М.Б. Глауэртом (1956) [53]. Решения, полученные в указанных работах, существенно не отличаются; далее подробно рассмотрено решение (Glauert, 1956) [53].

4.2 Автомоделное решение для параметров несущей фазы в пристенной ламинарной струе

Рассмотрим плоскую стационарную задачу – ламинарное истечение струи несжимаемой вязкой жидкости из щели над плоскостью. Уравнение импульса в приближении пограничного слоя, уравнение неразрывности и граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (4.2.1)$$

$$y = 0 : u = v = 0, \quad y \rightarrow \infty : u \rightarrow 0.$$

Ниже будет показано, что у системы (4.2.1) имеется интеграл, который сохраняет свое значение вдоль оси x . Таким образом, система уравнений (4.2.1)

имеет однопараметрическое семейство решений, и поэтому достаточно задать константу – значение интеграла – для нахождения единственного решения.

Исследуем интеграл системы (4.2.1). Проинтегрируем первое уравнение системы (4.2.1) по y в пределах от y до ∞ с использованием условия $u \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Делая подстановку из второго уравнения системы, получим:

$$\int_y^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -uv + \int_y^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} u^2 dy - uv + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Умножим последнее выражение на u и проинтегрируем по переменной y в пределах от 0 до ∞ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u \left\{ \int_y^{\infty} u^2 dy \right\} dy - \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \left\{ \int_y^{\infty} u^2 dy \right\} dy - \int_0^{\infty} u^2 v dy + \frac{1}{2} [u^2] \Big|_0^{\infty} = 0.$$

Используем уравнение неразрывности и граничные условия, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u \left\{ \int_y^{\infty} u^2 dy \right\} dy = 0,$$

$$F = \int_0^{\infty} u \left\{ \int_y^{\infty} u^2 dy \right\} dy = const. \quad (4.2.2)$$

Выражение для F можно интерпретировать как поток внешнего потока импульса.

В работе (Акатнов, 1953) [1] выведен другой интеграл задачи. Вдоль ламинарной струи, распространяющейся вдоль стенки, сохраняется также величина E , равная

$$E = \int_0^{\infty} u^2 \left(\int_0^y u ds \right) dy = const. \quad (4.2.3)$$

Нетрудно показать, что $E = F$:

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{\infty} u \left(\int_y^{\infty} u^2 ds \right) dy = \int_0^{\infty} u \left[\int_0^{\infty} u^2 ds - \int_0^y u^2 ds \right] dy = \\
&= \int_0^{\infty} u dy \cdot \int_0^{\infty} u^2 dy - \int_0^{\infty} u \left(\int_0^y u^2 ds \right) dy = \int_0^{\infty} u^2 dy \cdot \int_0^{\infty} u dy - \left[\int_0^y u ds \int_0^y u^2 ds \right] \Big|_0^{\infty} + \\
&\quad + \int_0^{\infty} u^2 \left(\int_0^y u ds \right) dy = \int_0^{\infty} u^2 \left(\int_0^y u ds \right) dy = E.
\end{aligned}$$

Ищем автомодельное решение системы (4.2.1), для этого введем функцию тока $\psi : u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$. Будем искать решение в виде:

$$\psi = x^{1-b} f(\eta), \quad \eta = (1-b)yx^{-b}.$$

Тогда второе уравнение исследуемой системы (4.2.1) примет вид:

$$f''' + ff'' + Af'^2 = 0, \quad A = (2b-1)/(1-b). \quad (4.2.4)$$

Граничные условия принимают вид:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 0.$$

Уравнение (4.2.4) с данными граничными условиями однородное, имеет множество решений, в том числе и тривиальное решение.

Для любого A существуют решения дифференциального уравнения (4.2.4) с $f''(\infty) = 0$. Интегрируя (4.2.4) в пределах от η до ∞ , получаем:

$$f'' + ff' - (A-1)h = 0, \quad h(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} f'^2 d\eta. \quad (4.2.5)$$

Заметим, что h – положительная функция. Умножив на f' и снова проинтегрировав, имеем

$$\frac{1}{2}f'^2 - fh + (A-2) \int_{\eta}^{\infty} f'hd\eta = 0.$$

Отсюда следует, что $A = 2$ и $b = 3/4$ и

$$\psi = x^{1/4} f(\eta), \quad \eta = \frac{1}{4} y x^{-3/4}.$$

Итак, уравнение имеет вид:

$$f''' + f f'' + 2 f'^2 = 0,$$

с граничными условиями $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 0$.

Для решения полученного уравнения умножим обе части уравнения на f , проинтегрируем по частям, получаем

$$f f'' - \frac{1}{2} f'^2 + f^2 f' = 0,$$

так как $f'(\infty) = 0$. Умножим на $f^{-3/2}$ и снова проинтегрируем, тогда получим:

$$f^{-1/2} f' + \frac{2}{3} f^{3/2} = \text{const.} \quad (4.2.6)$$

Решение данного уравнения обладает следующим свойством: если $f_0(\eta)$ – решение, то $f_1(\eta) = \lambda f_0(\lambda \eta)$ также является решением уравнения для любого λ . То есть уравнение (4.2.4) обладает однопараметрическим семейством решений. Единственность решения определяется заданием величины интеграла F или E . Поэтому, без ограничения общности, можно положить $f(\infty) = 1$, а константу в правой части взять равной $2/3$. Введем вспомогательную функцию g , $f = g^2$, тогда $f' = 2gg'$. Уравнение (4.2.6) примет вид:

$$g' = (1 - g^3)/3. \quad (4.2.7)$$

После интегрирования получаем решение:

$$\eta = \ln \frac{\sqrt{1+g+g^2}}{1-g} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}g}{2+g}.$$

Значения η , f , f' можно получить численно (Рис. 4.1).

Также легко вычислить значение $f''(0) = 2/9$ и максимальное значение $f' = 2^{-5/3}$, которое достигается при $f = 2^{-4/3}$. Данное решение соответствует значению интеграла

$$F = \frac{1}{40}.$$

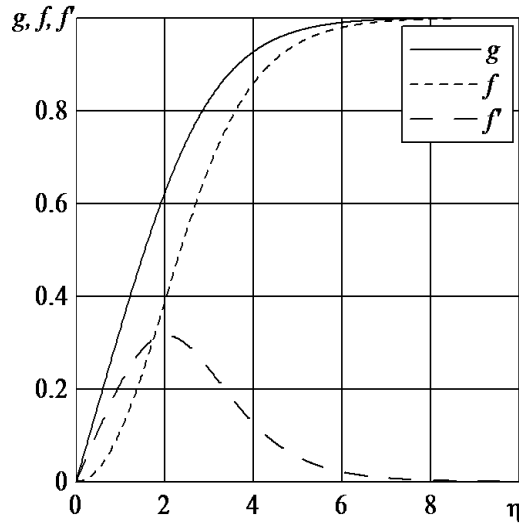


Рис. 4.1: Графики функций g , f , f'

Легко видеть, что для данного автомодельного решения, которое описывает источник, поток масс в источнике равен нулю, а поток импульса бесконечно большой.

$$Q = \int_0^{\pi/2} u_r r d\varphi = 0, \quad K = \int_0^{\pi/2} u_r^2 r d\varphi \rightarrow \infty.$$

Из (4.2.2) и (4.2.3) следует, что, несмотря на то, что подвод импульса бесконечен и подвод массы нулевой, их произведение остается конечным и равно:

$$KQ = \frac{20}{9}E.$$

Возвращаясь к размерным величинам, имеем:

$$\psi^* = (40E^*\nu x^*)^{1/4} f(\eta), \quad \eta = \left(\frac{5}{32} \frac{E^*}{\nu^3 x^{*3}} \right)^{1/4} y^*,$$

$$E^* = \frac{\nu U^2 L}{40},$$

$$u^* = \left(\frac{5}{2} \frac{E^*}{\nu x^*} \right)^{1/2} f'(\eta), \quad v^* = \left(\frac{5}{32} \frac{E^* \nu}{x^{*3}} \right)^{1/4} f - \frac{3}{4} \left(\frac{40E^* \nu}{x^{*3}} \right)^{1/4} f'(\eta),$$

$$Q^* = \rho (40E^* \nu x^*)^{1/4}, \quad K^* = \rho \frac{2}{9} \left(\frac{250E^{*3}}{\nu x^*} \right)^{1/4}.$$

Для трактовки экспериментальных данных представляют интерес две кривые. Первая, на которой продольная компонента скорости несущей фазы практически равна нулю (меньше максимальной скорости в сечении в 100

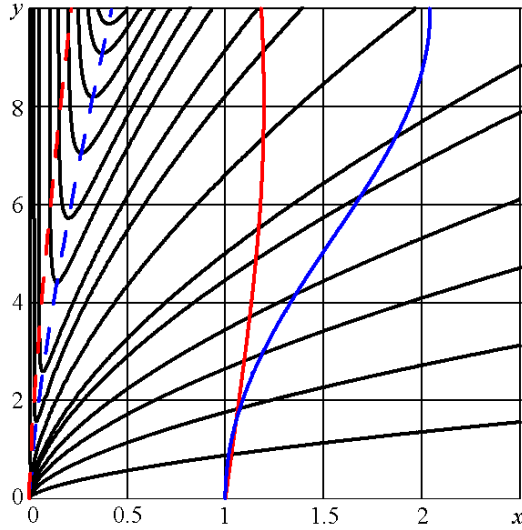


Рис. 4.2: Линии тока, условные границы струи (п.2) (синий пунктир – $v(x, y) = 0$, красный пунктир – $u(x, y) \approx 0$) и профили компонент скорости несущей фазы при $x = 1$ (красная линия – $u(x, y)$, синяя линия – $v(x, y)$)

раз), и вторая, на которой поперечная компонента скорости меняет знак ($v = 0$). Так как найденное решение является автомодельным, с $\eta = y/(4x^{1/4})$, достаточно найти одно значение η_0 , чтобы построить такие линии в обоих случаях. Действительно, рассмотрим для начала первый случай, в котором граница определяется из соотношения $u = 0.01u_{max}$. Как было показано выше, функция f' обладает максимумом, таким образом, при фиксированном x_0 имеем $u_{max} = 2^{-11/3}x_0^{-1/2}$. Получаем следующее условие для нахождения границы: $f' = 2^{-5/3}/100$; численно находится η , соответствующее этому значению: $\eta_0 = 7.91$. Во втором случае получаем уравнение для нахождения η_0 : $3\eta_0 f'(\eta_0) = f(\eta_0)$, которое также решается численно, $\eta_0 = 4.78$. На Рис. 4.2 представлены линии тока несущей фазы, условные границы струи, профили компонент скорости газа.

Рассмотрим следствие уравнения (4.2.5). При $A = 1$ из этого уравнения получаем уравнение и выражения для автомодельных величин для плоской свободной струи, полученные Шлихтингом и Бикли (Шлихтинг, 1974) [35]:

$$f'^2 + f'' + f''' = 0, \quad b = 2/3,$$

$$\psi = x^{1/3} f(\eta), \quad \eta = \frac{1}{3} y x^{-2/3}.$$

4.3 Полный лагранжев метод расчета параметров дисперсной фазы

Уравнения для дисперсной фазы в безразмерном виде таковы:

$$(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_s u_s) + \frac{\partial}{\partial y} (n_s v_s) = 0;$$

\mathbf{j} – единичный вектор оси ординат.

Эта система решается с помощью полного лагранжева метода. Введем лагранжеву координату y_0 – ординату начала траектории при $t = 0$, $x = x_0$; здесь t – время движения частицы вдоль траектории. На выбранной траектории (фиксированном значении y_0) получаем систему:

$$\frac{dx}{dt} = u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s,$$

$$\frac{du_s}{dt} = u - u_s, \tag{4.3.1}$$

$$\frac{dv_s}{dt} = v - v_s + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta (u - u_s) \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|},$$

$$n_s(0, y_0) \cdot u_s(0, y_0) = n_s(t, y) \cdot \left| u_s \frac{\partial y}{\partial y_0} - v_s \frac{\partial x}{\partial y_0} \right|. \tag{4.3.2}$$

Начальные условия для системы, описывающей движение частиц, могут быть определены несколькими способами. Рассмотрим три варианта граничных условий для скорости частиц. В первом случае *a*) задается продольная скорость, в каждой точке равная скорости несущей фазы, а поперечная скорость предполагается равной нулю:

$$x(0) = \varepsilon, \quad y(0) = y_0, \quad u_s(0) = u(\varepsilon, y_0), \quad v_s(0) = 0.$$

Во втором случае *b*) задается однородная продольная скорость частиц:

$$x(0) = \varepsilon, \quad y(0) = y_0, \quad u_s(0) = u_0 = \text{const}, \quad v_s(0) = 0.$$

В третьем случае *c*) обе начальные компоненты скорости частиц считаются равными соответствующим компонентам скорости несущей фазы:

$$x(0) = \varepsilon, y(0) = y_0, u_s(0) = u(\varepsilon, y_0), v_s(0) = v(\varepsilon, y_0).$$

Ниже приведена система уравнений для компонент якобиана:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= e_3, \quad \frac{de_2}{dt} = e_4, \quad \frac{dt_3}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2 - e_3, \\ \frac{de_4}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} e_1 + \frac{\partial v}{\partial y} e_2 - e_4 + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta \left[\sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \left(\frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2 - e_3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u - u_s}{2} \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{-1}} \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Начальные условия для этой системы зависят от начальных условий для системы (4.3.1). В случае *a*) начальные условия примут вид:

$$e_1(0) = 0, e_2(0) = 1, e_3(0) = \frac{\partial u(\varepsilon, y_0)}{\partial y}, e_4(0) = 0.$$

В случае *b*):

$$e_1(0) = 0, e_1(0) = 1, e_1(0) = 0, e_4(0) = 0.$$

В случае *c*) :

$$e_1(0) = 0, e_2(0) = 1, e_3(0) = \frac{\partial u(\varepsilon, y_0)}{\partial y}, e_4(0) = \frac{\partial v(\varepsilon, y_0)}{\partial y}.$$

Таким образом, получена система 8 обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих течение дисперсной среды в пристенной струе, с различными начальными условиями.

4.4 Результаты численного решения

Рассмотрим сначала случай, в котором не учитывается вклад подъемных сил Сэфмана.

Была исследована зависимость длины релаксации частиц при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$ от $x_0 = \varepsilon$. Структура течения меняется с изменением ε : длина на которой происходит релаксация фаз увеличивается с

уменьшением ε , так как при уменьшении x_0 увеличивается значение $u(x_0, y_0)$, а длина, на которой происходит релаксация фаз, линейно зависит от начального значения продольной компоненты скорости.

Изучена структура течения двухфазной струи при $x_0 = 0.01$ и различных начальных условиях (см п.3 настоящей главы). Для случая b), при $u_s(x_0, y_0) = u_0 = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$ графики траекторий частиц представлены на Рис. 4.3 вместе с линиями тока несущей фазы. Видно, что траектории частиц не пересекаются и нет осаждения частиц на стенку. Приведены сравнительные графики профилей скоростей несущей и дисперсной фазы (Рис. 4.4, Рис. 4.5) и концентрации (Рис. 4.6) в разных сечениях: при $x = 0.1$, $x = 0.2$, $x = 0.5$, $x = 1$. Здесь и далее на графиках представлены измененные величины компонент скоростей обеих фаз

$$u_2 = 4x^{1/2}u, \quad u_{s2} = 4x^{1/2}u_s,$$

$$v_2 = 4x^{3/4}v, \quad v_{s2} = 4x^{3/4}v_s$$

в зависимости от автомодельной переменной η . Вблизи начала струи обе компоненты скорости дисперсной фазы больше соответствующих компонент скоростей несущей фазы, а значения η , при которых достигаются максимумы скоростей частиц, меньше, чем таковые у несущей фазы. Релаксация фаз завершается к $x = 1$. Подобным образом выглядят профили скоростей дисперсной фазы, если задавать другое $u_0 > 0.3$; длина релаксации линейно зависит от значения u_0 . На Рис. 4.6 показано развитие профиля концентрации частиц с двумя выраженными максимумами на внешней границе области струи и на стенке. Частицы вводятся в ограниченной области слева, и ниже по течению занимают ограниченную область течения. На внешней границе области двухфазного течения (в которую попадают частицы) формируется особенность в поле концентрации дисперсной фазы. Частицы, траектории которых начинаются вблизи стенки, удаляются от нее. Другие частицы, траектории которых начинаются выше, сначала движутся по направлению к стенке, потом поперечная скорость частиц меняет знак, и частицы удаляются от стенки.

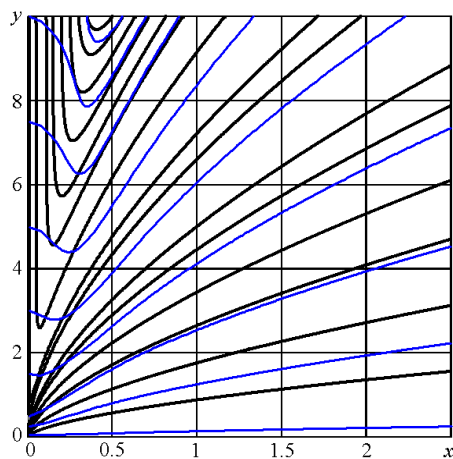


Рис. 4.3: Траектории частиц дисперсной фазы при $x_0 = 0.01$, $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$ (синие) и линии тока несущей фазы (черные)

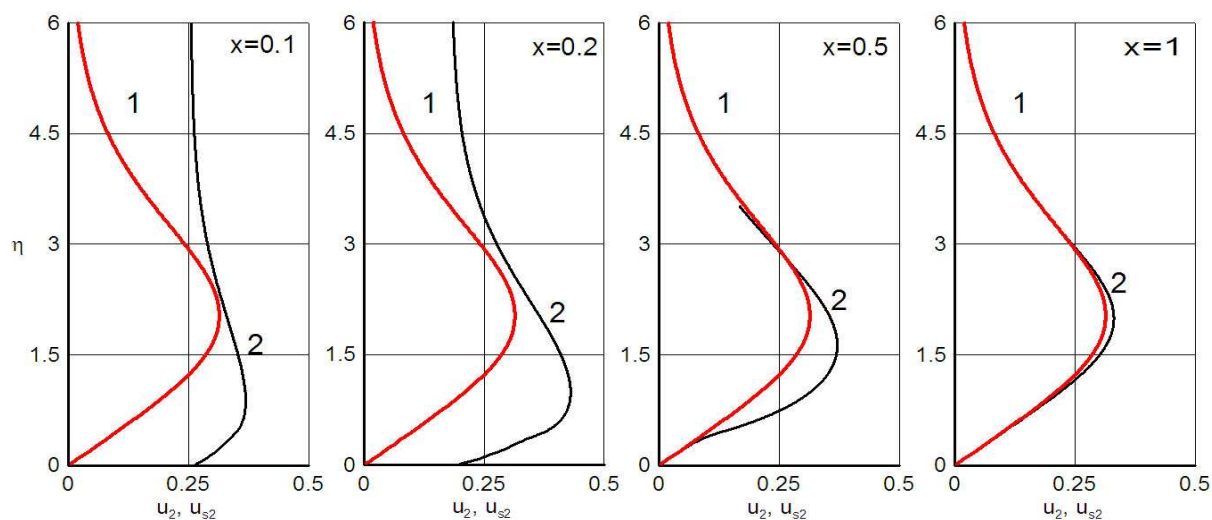


Рис. 4.4: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

В средней области течения формируется область накопления частиц. После завершения процесса релаксации скоростей фаз частицы вмораживаются в газ и профиль концентрации в зависимости от функции тока практически не меняется. Поля скоростей и концентрации вдоль всей струи однозначны.

Частным случаем однородного начального распределения продольной компоненты скорости дисперсной фазы является случай, когда начальная скорость задается практически нулевой: $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$. Структура течения существенно меняется по сравнению с предыдущим случаем (см. Рис. 4.7): в силу того, что в верхней области поперечная скорость несущей

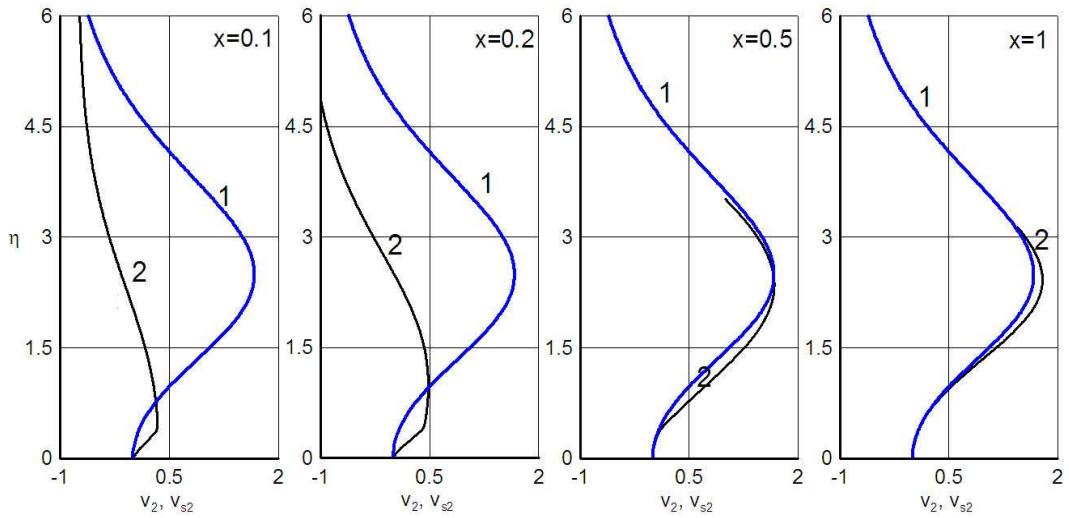


Рис. 4.5: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

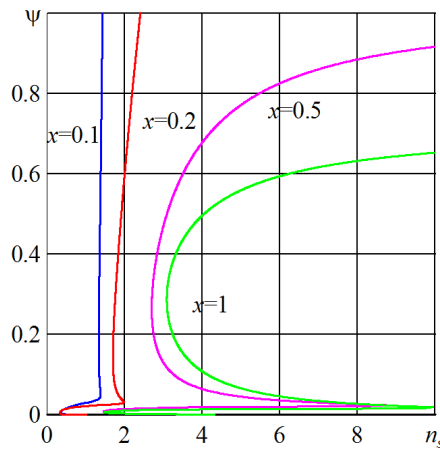


Рис. 4.6: Профили концентрации; 1 – $x = 0.1$, 2 – $x = 0.2$, 3 – $x = 0.5$, 4 – $x = 1$, ψ – функция тока

щей фазы по модулю велика и направлена к оси x , а продольная составляющая скорости газа мала, траектории всех частиц пересекаются, и траектории некоторых частиц заканчиваются на оси x . Получаются двузначные профили компонент скоростей (см. Рис. 4.8, Рис. 4.9). Сначала значения компонент скоростей меньше, чем у несущей фазы, но их значения растут и поэтому к $x = 0.2$ становятся больше, чем компоненты скорости газа. Релаксация скоростей фаз происходит к $x = 1$. Профили концентрации в этом случае выглядят так же, как и в первом случае. Образуются особенности у стенки и в средней области течения, что объясняется пересечением траекторий частиц (второй пик формируется при $\psi \approx 0.5$).

Рассмотрим случай *a*), когда начальный профиль продольной компонен-

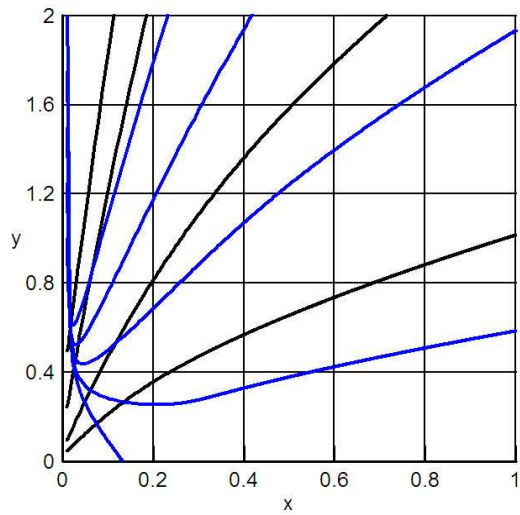


Рис. 4.7: Траектории частиц дисперсной фазы при $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$

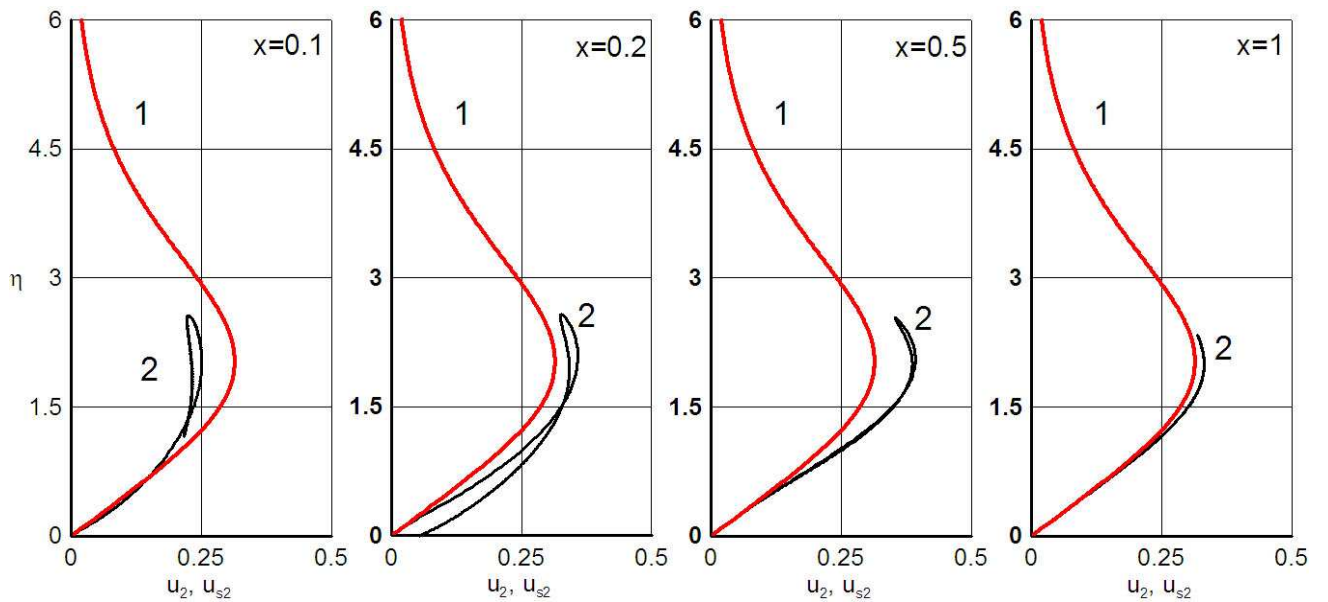


Рис. 4.8: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

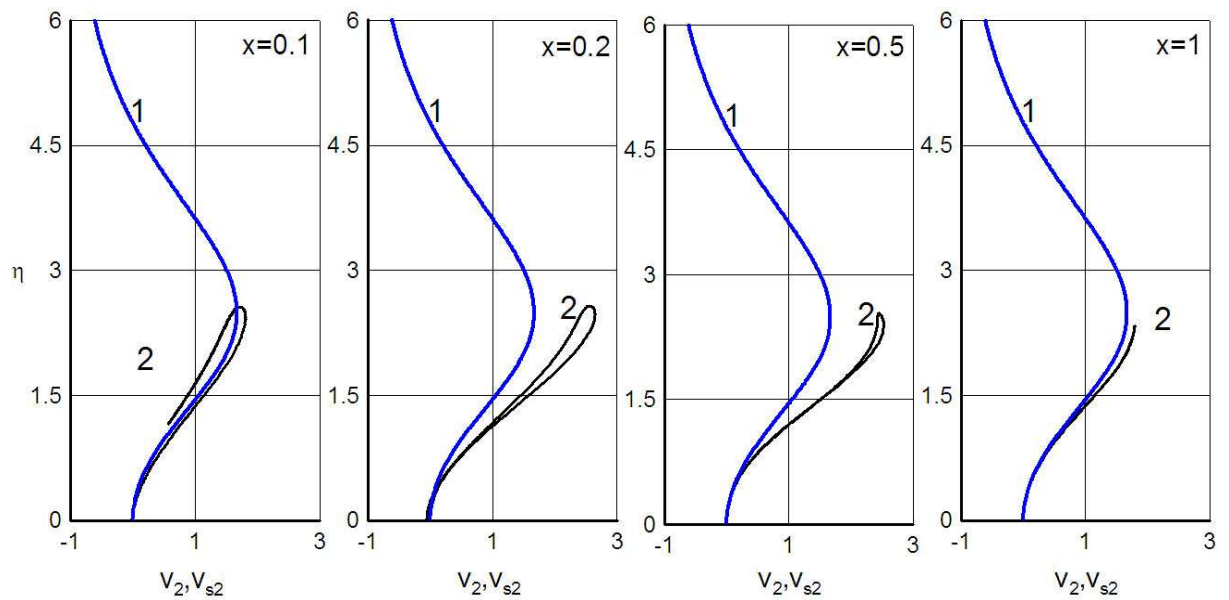


Рис. 4.9: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

ты скорости дисперсной фазы задается таким же, как и у несущей фазы, а начальная поперечная скорость частиц равна нулю. Расчеты показывают, что траектории частиц пересекаются, траектории некоторых частиц пересекают ось x , что объясняется тем же, что и в предыдущем случае. Профили скоростей и концентрации двузначны (Рис. 4.10, Рис. 4.11). Значения компонент скорости несущей фазы быстро уменьшаются, поэтому скорость частиц больше, чем скорость газа. При небольших значениях η имеет место максимум u_{2s} , v_{2s} , который уменьшается по мере того, как частицы осаждаются на стенку. Профили обеих компонент скоростей несущей и дисперсной фазы практически совпадают уже при $x = 1$. В поле концентрации частиц образуются две области высоких значений – в пристенной и в средней области.

При задании начальной скорости частиц такой же, как и у несущей фазы, получается течение с пересечением траекторий частиц. В силу того, что частицам, траектории которых расположены близко к стенке, сообщается большая поперечная скорость, направленная от оси x , формируется более широкая струя. Значения компонент скорости дисперсной фазы больше, чем в предыдущих случаях. Релаксация фаз происходит позже, но при $x = 1.5$

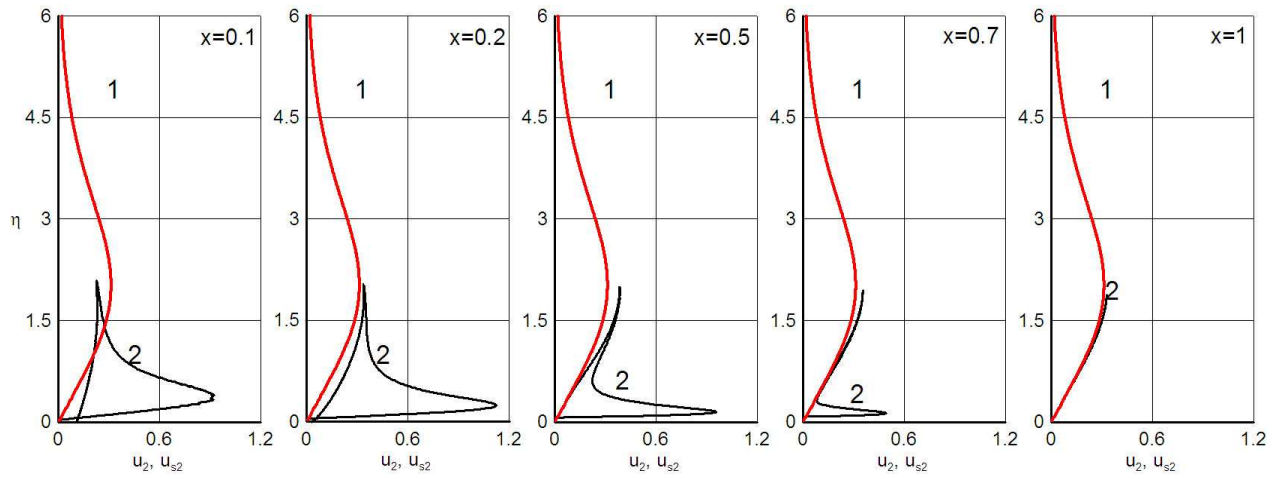


Рис. 4.10: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

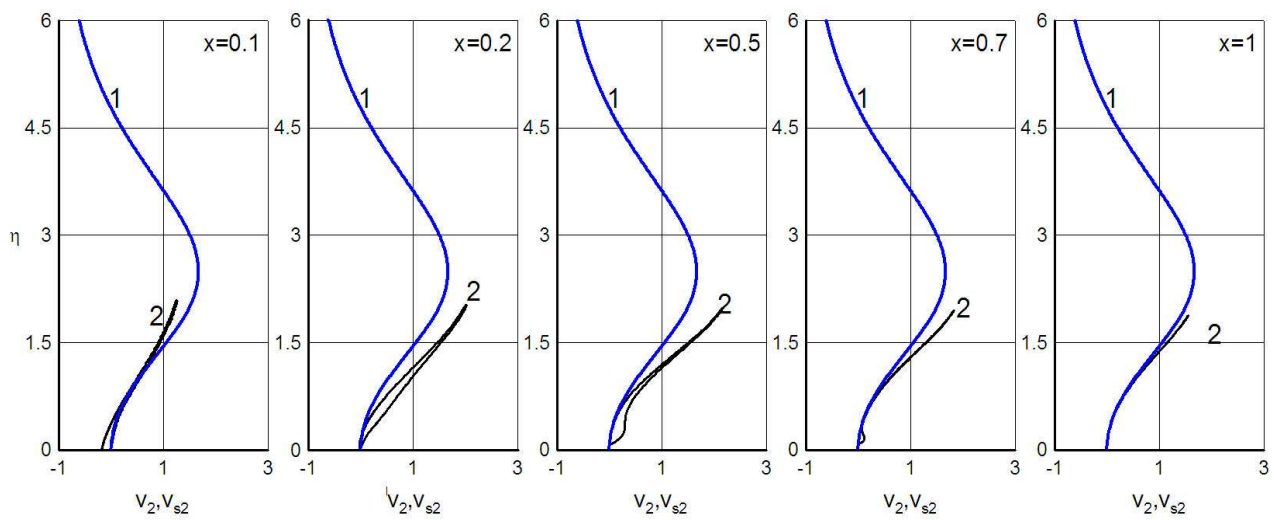


Рис. 4.11: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

профили скоростей фаз уже совпадают. Профили концентрации выглядят сложнее: образуются два пика в средней области и два в нижней, у стенки. Далее они попарно объединяются, к концу процесса релаксации фаз формируется профиль с особенностями у стенки и в средней области.

Рассмотрим теперь все описанные случаи с учетом подъемной силы Сэфмана. Влияние силы Сэфмана на движение частиц сказывается в том, что траектории частиц, начинающихся у оси x , пересекают стенку, и появляются траектории частиц, на которых поперечная составляющая скорости частицы несколько раз меняет знак.

Рассмотрим сначала случай $\zeta = 1$. Траектории частиц в четырех рассмат-

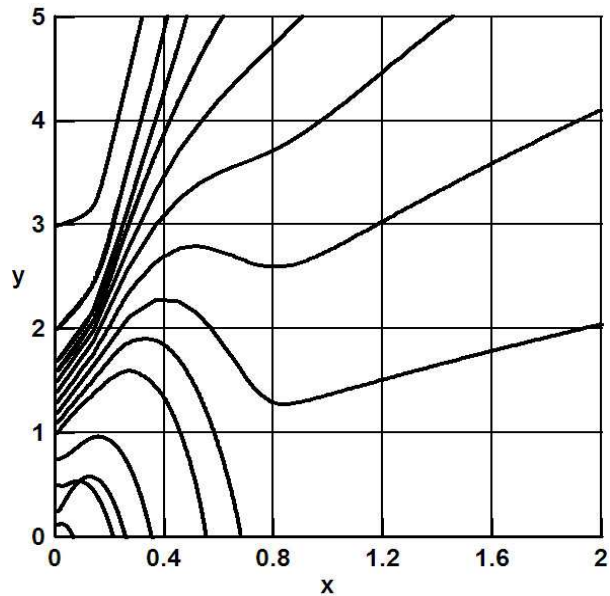


Рис. 4.12: Траектории частиц дисперсной фазы при $x_0 = 0.01$, $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$

риваемых случаях выглядят так же как и при $\zeta = 0$, за исключением того, что во всех случаях есть траектории, заканчивающиеся на оси x . Сила Сэфмана с $\zeta = 1$ не приводит к появлению пересечения траекторий частиц в рассмотренных случаях. Профили скоростей качественно не меняются.

В случае, если $\zeta = 100$, формируются качественно другие картины течения. Например, в случае b), при $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, образуется область неоднозначности (см. Рис. 4.12, 4.13, 4.14). В профилях скорости обеих компонент скорости дисперсной фазы в начале течения есть складка, исчезающая с пересечением соответствующих траекторий с осью x . В случае b), при $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, структура течения дисперсной фазы совершенно отличается от того случая, когда сила Сэфмана не учитывается (Рис. 4.15). Зависимость расположения траекторий частиц можно описать следующим образом. Траектории частиц, начинающиеся на малом расстоянии от стенки, поднимаются вверх, так что траектории частиц, которые начинаются выше них, пересекают первые и далее располагаются ниже. Начиная с некоторого y_0 траектории частиц пересекают все траектории, которые начинаются ниже них. И только потом, траектории, упорядоченные

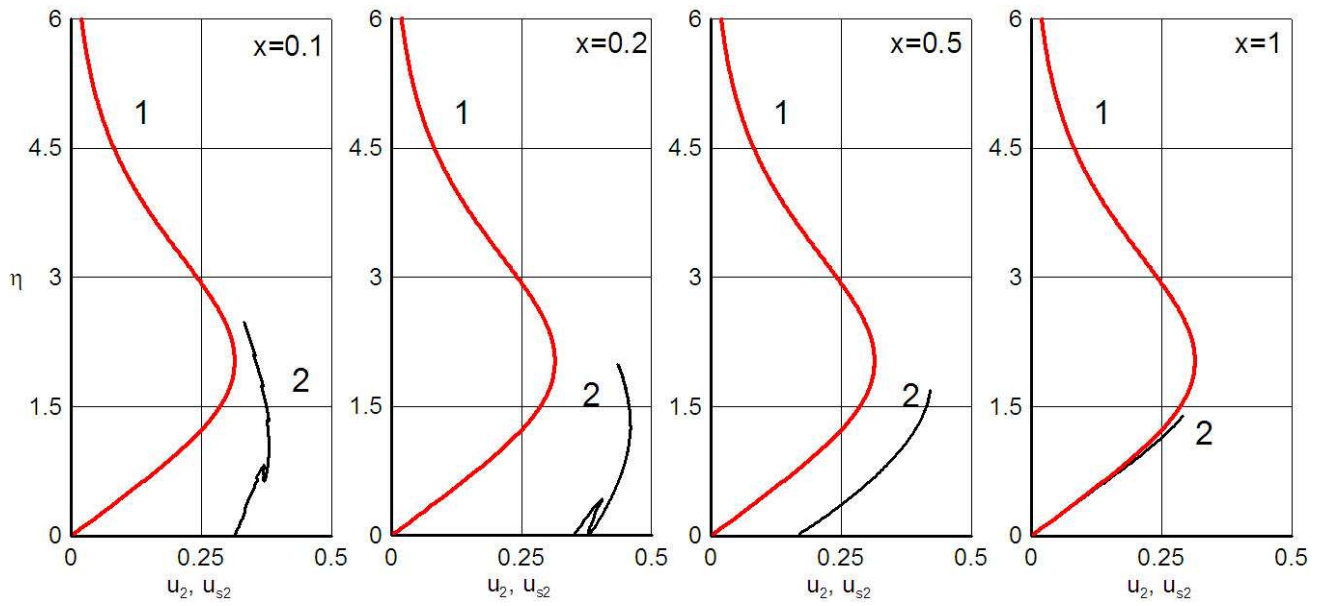


Рис. 4.13: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

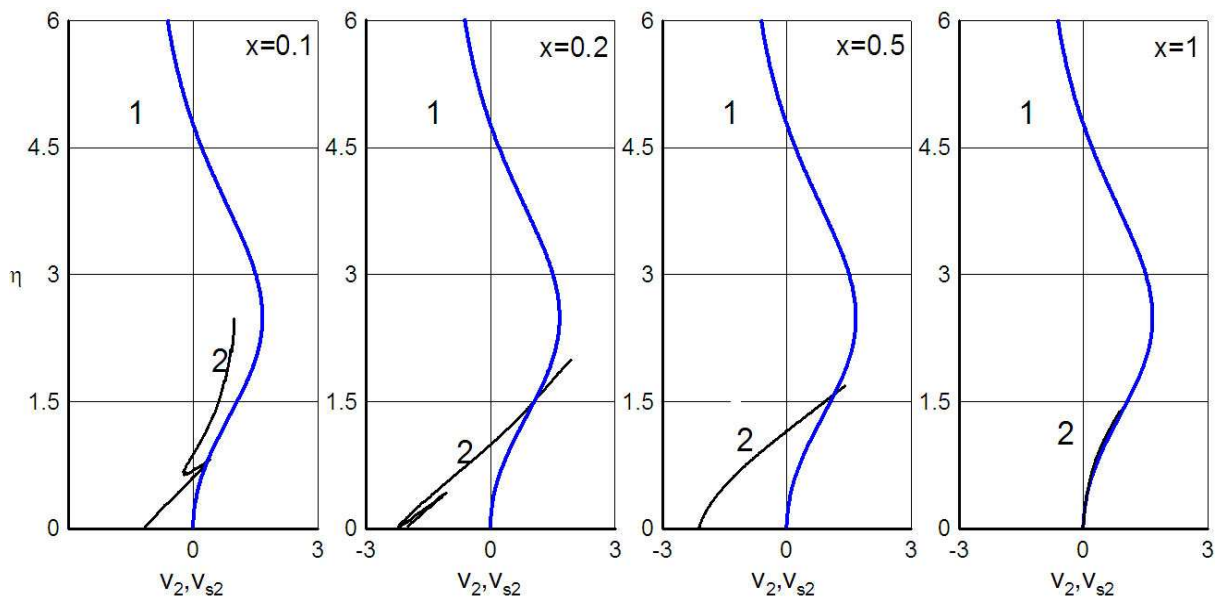


Рис. 4.14: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

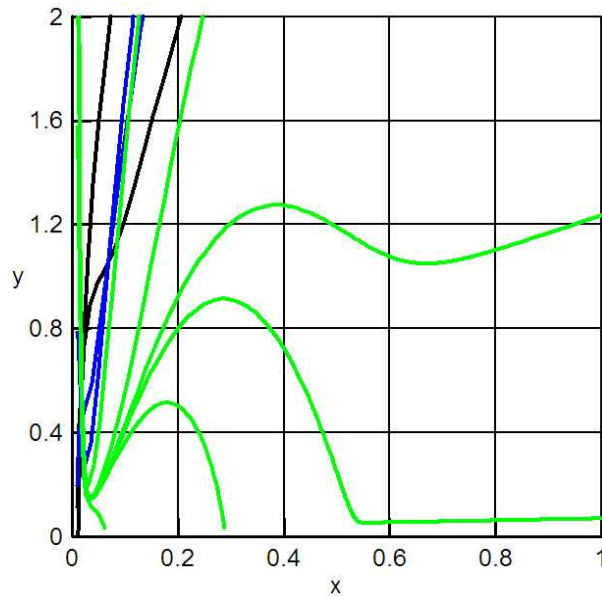


Рис. 4.15: Траектории частиц дисперсной фазы при $u_s(x_0, y_0) = 0.01$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$

по возрастанию их y_0 располагаются одна под другой и, наконец, достигают ось x . Профили скоростей в таком случае многозначные. Длина, на которой происходит релаксация фаз, равна 1.

Задав $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$, влияние силы Сэфмана отличается от того, что было показано в предыдущем случае (см. Рис. 4.16). Профили скоростей (см. Рис. 4.17, 4.18) становятся однозначными уже при $x = 0.1$ и совпадают с соответствующими компонентами скорости несущей фазы при $x = 1$. В случае c), при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$, сила Сэфмана влияет на размер струи: область, заполненная частицами, расширяется, длина, на которой происходит релаксация фаз существенно не меняется (Рис. 4.19, 4.20, 4.21). При $x = 1.5$ профили компонент скоростей обеих фаз совпадают.

На Рис. 4.22 показаны траектории частиц для разных значений параметра при подъемной силе Сэфмана: $\zeta = 0$, $\zeta = 100$ и $\zeta = 200$ при $x_0 = 0.01$, $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$. С увеличением вклада силы Сэфмана картина течения качественно меняется, могут образовываться множественные пересечения траекторий частиц и множественные пики в поперечном распределении концентрации дисперсной фазы.

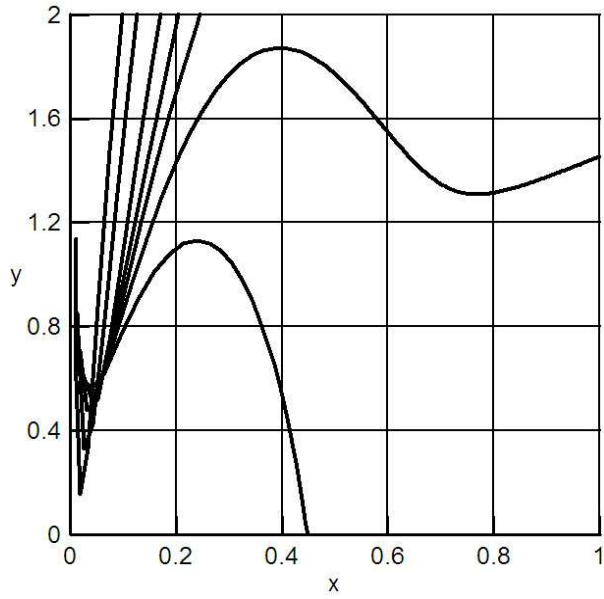


Рис. 4.16: Траектории частиц дисперсной фазы при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$

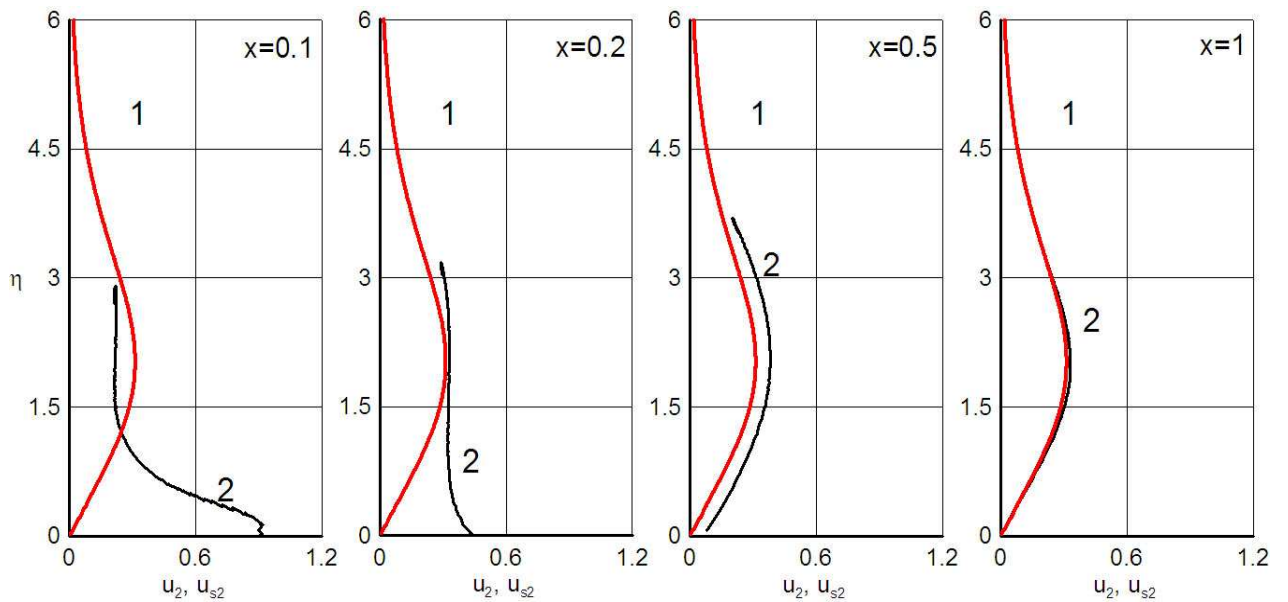


Рис. 4.17: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

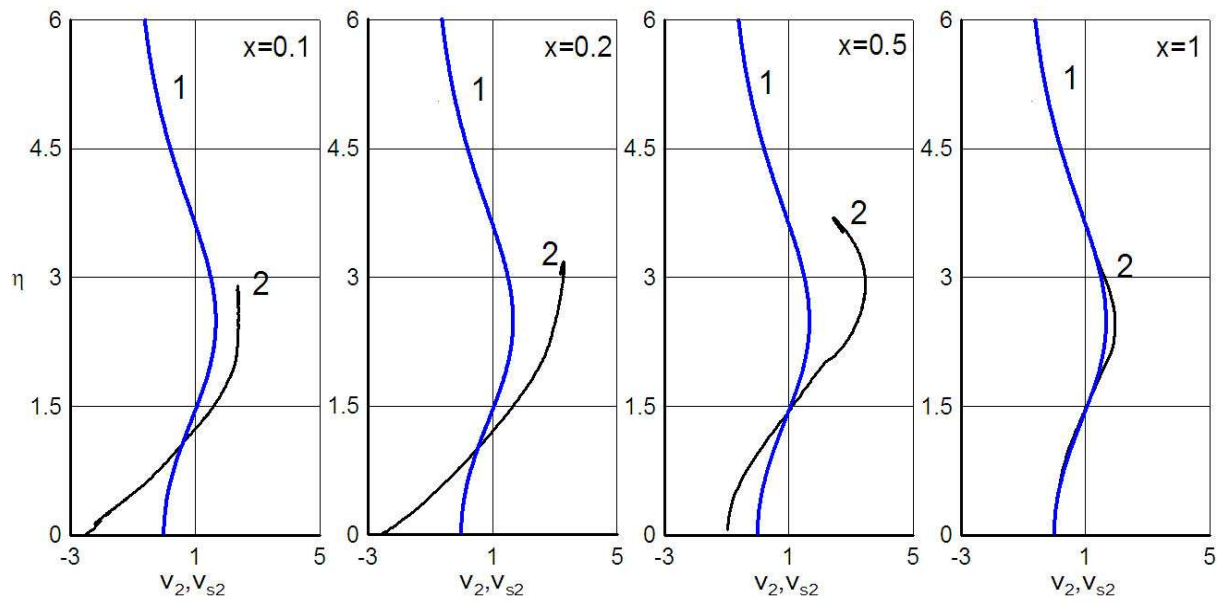


Рис. 4.18: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

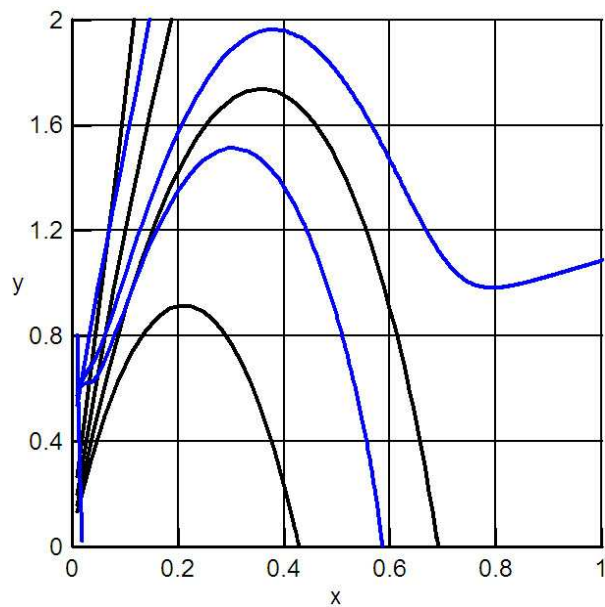


Рис. 4.19: Траектории частиц дисперсной фазы при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$, $\zeta = 100$

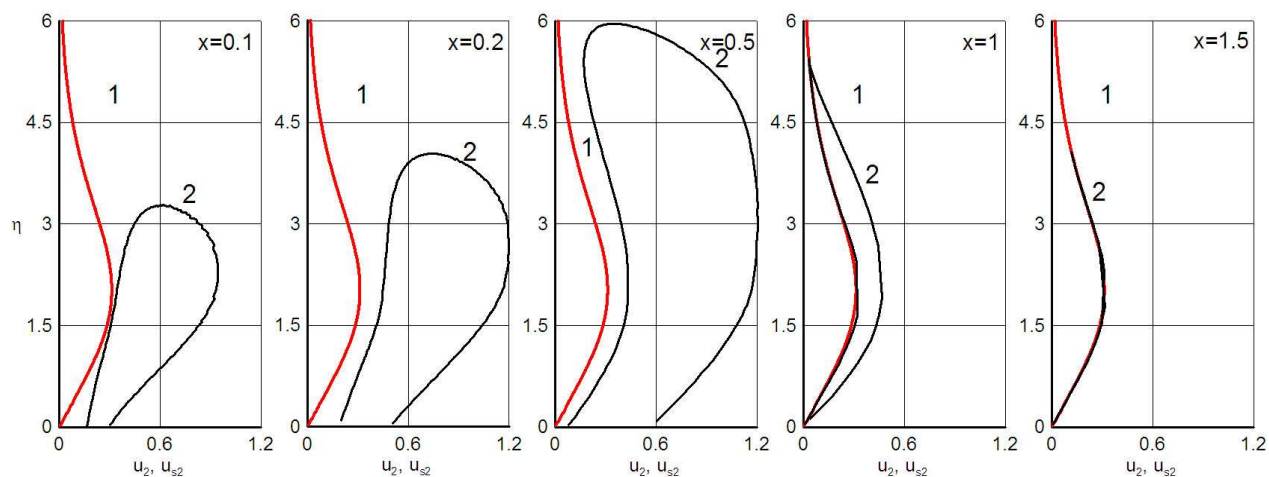


Рис. 4.20: Профили продольных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

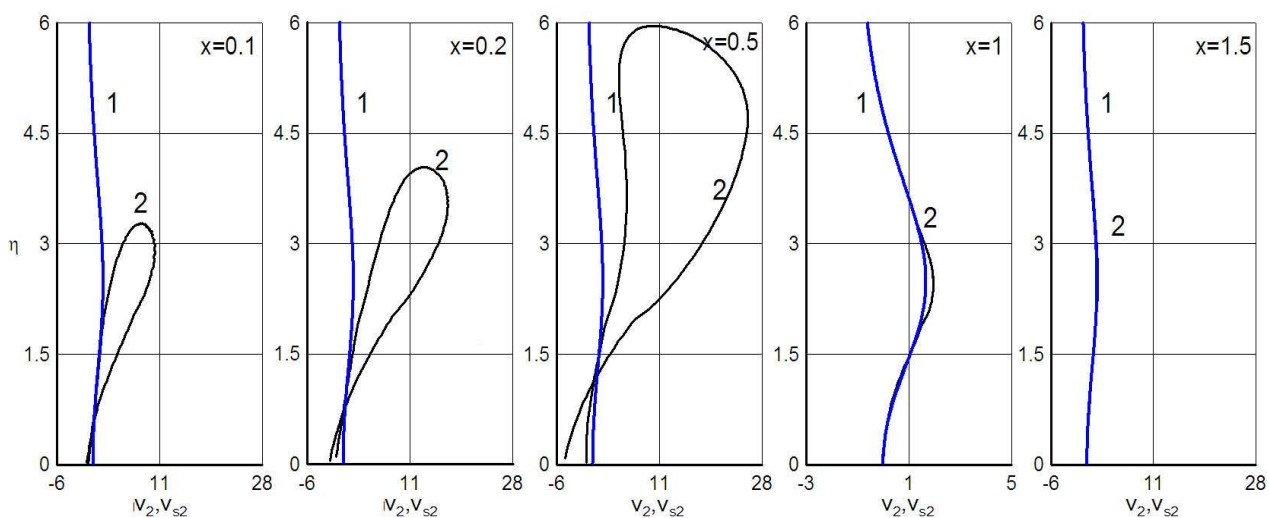


Рис. 4.21: Профили поперечных скоростей при $u_s(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, $v_s(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$, $\zeta = 100$; 1 – несущая фаза, 2 – дисперсная фаза

Выводы

Исследовано истечение вязкой несжимаемой жидкости с примесью твердых частиц из бесконечно узкой щели около стенки. Задача решена в рамках модели взаимопроникающих континуумов в приближении пограничного слоя. Рассмотрен плоский стационарный случай. Несущая фаза описывается известным автомодельным решением, полученным Н.И. Акатновым и М.Б. Глауэртом. Для расчета полей скорости и концентрации дисперсной фазы использован полный лагранжев метод.

Показано, что после завершения процесса релаксации скоростей фаз фор-

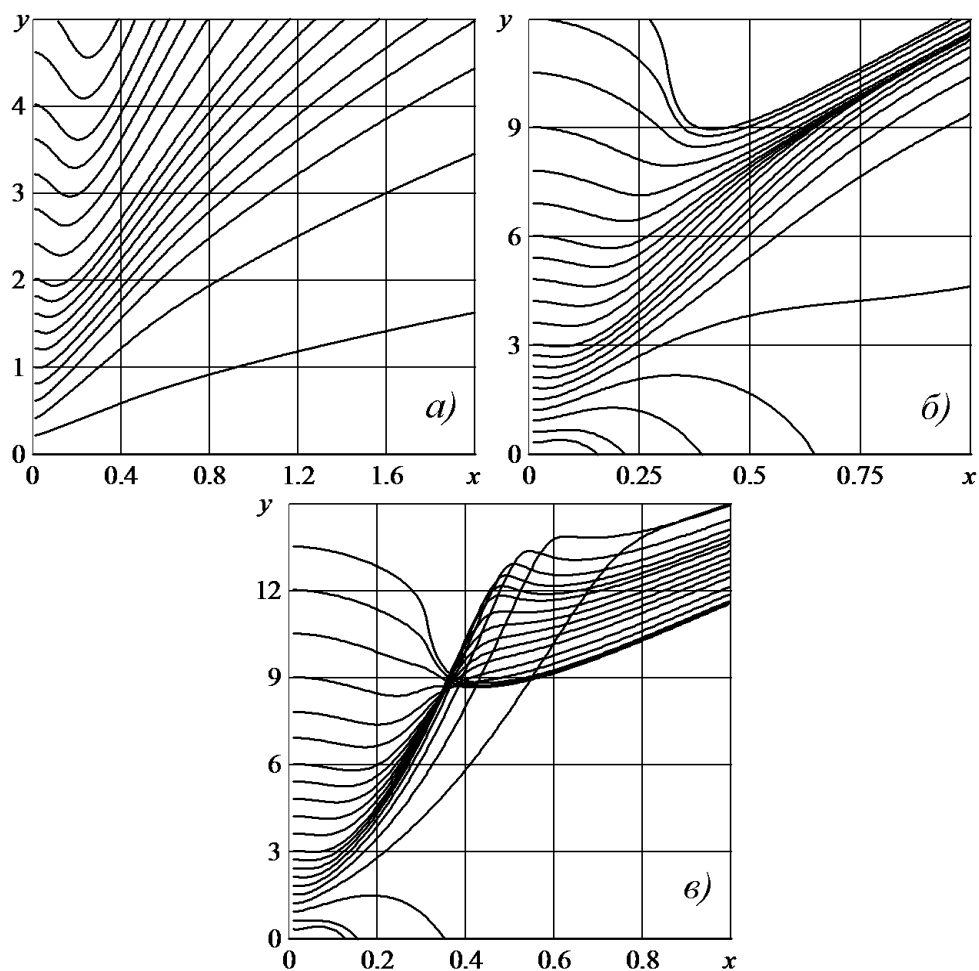


Рис. 4.22: Траектории частиц при $x_0 = 0.01$, $u_s(x_0, y_0) = 0.3$, $v_s(x_0, y_0) = 0$, а) $\zeta = 0$; б) $\zeta = 100$; в) $\zeta = 200$.

мируется автомодельный профиль концентрации частиц, у которого образуются два пика – у стенки и в средней области. При некоторых начальных условиях возникают пересечения траекторий.

Учет подъемных сил Сэфмана ведет к качественному изменению структуры течения. При значении коэффициента при силе Сэфмана порядка единицы и более происходит осаждение на начальном участке стенки. В случае увеличения силы Сэфмана могут образовываться множественные пересечения траекторий частиц.

Глава 5. Подъем частиц за движущейся ударной волной

5.1 Постановка задачи о развитии пограничного слоя запыленного газа за движущейся плоской ударной волной

Рассмотрим двумерную задачу о подъеме пыли за счет сил Сэфмана в сжимаемом пограничном слое за движущейся ударной волной. Считается, что на рассматриваемом отрезке ударная волна движется с постоянной скоростью U_{sh}^* вдоль плоской стенки. Газ перед ударной волной находится в состоянии покоя, температура газа совпадает с температурой стенки T_w^* . Несущая фаза – вязкий сжимаемый газ, вязкость и теплоемкость которого линейно зависят от температуры:

$$\frac{\mu^*}{\mu_+^*} = \frac{\lambda^*}{\lambda_+^*} = K \frac{T^*}{T_+^*}, \quad (5.1.1)$$

где K – константа. Здесь и далее нижним индексом “+” отмечены параметры за ударной волной, “–” – перед ударной волной.

В межфазном обмене импульсом учитываются силы аэродинамического сопротивления и подъемная сила, возникающая из-за неоднородности потока. Выражение для них записано в (2.1.5) – (2.1.6), тепловой поток к частице принят в виде (2.1.7). Рассматриваются два случая: 1) ударная волна движется по запыленному газу вдоль плоской твердой поверхности (в этом случае частицы попадают в пограничный слой, “прошивая” ударную волну) и 2) ударная волна движется вдоль эродирующего слоя дисперсного осадка (в этом случае частицы попадают в пограничный слой с поверхности разрушающегося слоя осадка, предполагаемой плоской).

Постановка задачи, предложенная ранее в (Ван, Осипцов, 1999) [6], в данном исследовании дополнена условием Багнольда (Bagnold, 1941) [40], которое учитывает зависимость потока частиц, вовлекаемого в движение из слоя осадка, от местной динамической скорости, то есть от трения на стенке:

$$q_B^* = C_B \frac{\rho^*}{g} \left(\frac{\tau^*}{\rho^*} \right).$$

Здесь C_B – коэффициент, соответствующий данному слою осадка, определяемый из экспериментов.

Перейдем в систему координат, связанную с ударной волной: ось Ox направлена вдоль стенки, ось Oy – вдоль плоскости ударной волны, начало координат в точке их пересечения. В этой системе координат получаем стационарную задачу о движении запыленного газа в пограничном слое на подвижной стенке. Ударная волна покоится, на нее набегают газ со скоростью U_{sh} .

Характерными величинами в данной задаче (которые будут использованы в качестве масштабов при обезразмеривании) являются значения параметров за ударной волной. Так как объемная доля примеси пренебрежимо мала, параметры несущей фазы до и после фронта волны связаны обычными соотношениями Рэнкина-Гюгонио:

$$2\gamma M_-^2 M_+^2 - (\gamma - 1)(M_-^2 + M_+^2) = 2, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\rho_+^*}{\rho_-^*} = \frac{u_-^*}{u_+^*} = \frac{(\gamma + 1)M_-^2}{(\gamma - 1)M_-^2 + 2},$$

$$\frac{p_+^*}{p_-^*} = \frac{2\gamma M_-^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

$$\frac{T_+^*}{T_-^*} = \frac{p_+^* \rho_-^*}{p_-^* \rho_+^*} = \frac{[2\gamma M_-^2 - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1)M_-^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_-^2}.$$

Параметры среды частиц непрерывны при прохождении через ударную волну (Marble, 1970) [75].

Уравнение состояния:

$$p^* = \rho^* R T^*.$$

Введем безразмерные параметры следующим образом:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L} \sqrt{\text{Re}}, \quad u = \frac{u^*}{U_+}, \quad v = \frac{v^*}{U_+} \sqrt{\text{Re}},$$

$$u_s = \frac{u_s^*}{U_+}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{U_+} \sqrt{\text{Re}}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s0}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_+^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_+^* U_+^2}.$$

Здесь n_{s0} – характерная концентрация частиц в области перед ударной волной, L – длина скоростной релаксации частиц при стоксовском законе сопротивления. Температуру нормируем так, чтобы безразмерная скорость и температура принимали одинаковые значения на границах:

$$T = \frac{T^* (U_{sh} - U_+) + U_+ T_w^* - U_{sh} T_+^*}{(T_w^* - T_+^*) U_+},$$

$$T^* = \frac{(T_w^* - T_+^*) U_+ T - U_+ T_w^* + U_{sh} T_+^*}{(U_{sh} - U_+)}.$$

Введем коэффициенты и вспомогательную функцию:

$$D_T = \frac{T_w^*}{T_+^*}, \quad D_U = \frac{U_{sh}^*}{U_+^*},$$

$$g_T = \frac{(D_T - 1) T - D_T + D_U}{(D_U - 1)}.$$

Тогда

$$T^* = T_+^* \frac{(D_T - 1) T - D_T + D_U}{(D_U - 1)}$$

и

$$T^* = T_+^* g_T, \quad \mu^* = \mu_+^* K g_T, \quad \lambda^* = \lambda_+^* K g_T. \quad (5.1.3)$$

Внешнее решение – однородный поток газа, движущийся со скоростью U_+^* .

Переходя к пределу $\text{Re} \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений (2.1.8) – (2.1.9), измененную с учетом нормировки (5.1.3) и известного внешнего решения $p = 1/(\gamma M_+^2)$, для обеих фаз:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (5.1.4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = K \frac{\partial}{\partial y} \left(g_T \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(g_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) + K \text{Ec} (D_U - 1) g_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

$$\frac{du_s}{dt} = K g_T (u - u_s) \Psi_{st}, \quad (5.1.5)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = K g_T (v - v_s) \Psi_{st} + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta \sqrt{K} \sqrt{\rho g_T \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \Psi_{saf} - \omega,$$

$$n_s(0, y_0) \cdot u_s(0, y_0) = n_s(t, y_0) \cdot \left| u_s \frac{\partial y}{\partial y_0} - v_s \frac{\partial x}{\partial y_0} \right|,$$

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{2}{3} \chi \frac{K}{\text{Pr}} g_T (T - T_s) \Psi_h.$$

Здесь

$$\zeta = \frac{6.46}{12\pi\sqrt{6}} \left(\frac{2\rho_{sm}}{\rho_+^*} \right)^{1/4} \text{Re}_{s0}^{3/2}, \quad \text{Re}_{s0} = \frac{2\rho_+^* \sigma U_+^*}{\mu_+^*}, \quad \omega = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\text{Fr}^2}.$$

В этой системе уравнения для дисперсной фазы приведены к виду (2.2.1), влиянием среды частиц на несущую фазу пренебрегается. Уравнение состояния:

$$\rho g_T = 1. \quad (5.1.6)$$

Граничные условия для несущей фазы:

$$x = 0, : u = 1, v = 0, T = 1, \rho = 1, \quad (5.1.7)$$

$$y = 0 : u = D_U, v = 0, T = D_U.$$

Две постановки задачи – распространение ударной волны в запыленном газе над стенкой и движение ударной волны над слоем осадка – соответствуют двум способам задания граничных условий:

$$x = 0 : u_s = D_U, v_s = 0, T_s = D_U, n_s = 1 \quad (5.1.8)$$

и

$$y \rightarrow 0 : u_s \rightarrow D_U, v_s = 0, T_s = D_U, n_s v_s \rightarrow C g_T^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{3/2}, \quad (5.1.9)$$

где $C = C_B L K^{3/2} (\rho_+^* / n_{s0} m) \text{Re}^{1/4} / \omega$.

Взаимодействие частиц со стенкой в данной работе не рассматривается (после осаждения частицы на стенку, ее дальнейшее движение не исследуется).

Таблица значений определяющих параметров

2σ , см	L , см	ε	Re_{s0}	ζ	ω
10^{-4}	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	24	$5.5 \cdot 10^1$	$3.74 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	$1.33 \cdot 10^1$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	240	$1.74 \cdot 10^3$	$3.74 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$1.33 \cdot 10^3$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	2400	$5.5 \cdot 10^4$	37.4

Так как $\alpha = 0$, исходная задача разбивается на две – аналогичную задачу для чистого газа и задачу расчета движения дисперсной фазы с уже известными параметрами несущей фазы. Эти задачи решены последовательно.

5.2 Автомоделное решение задачи о течении в сжимаемом пограничном слое на подвижной стенке

Рассмотрим решение задачи о движении совершенного газа в пограничном слое на подвижной стенке (систему (5.1.4) с граничными условиями (5.1.7) и уравнением состояния (5.1.6)) для случая $Pr = 1$, что применимо для газов. Введем новые переменные, переменные Дородницына (Дородницын, 1942) [13]:

$$x, \xi = \int_0^y \rho dy.$$

Тогда уравнение неразрывности переписется в виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \rho u}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial \rho v}{\partial \xi} = 0.$$

Введем функцию тока ψ следующим образом:

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - u \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Откуда следует, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \rho v + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{v} = \rho v + u \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Тогда уравнения (5.1.4) примут вид уравнений пограничного слоя для несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= K \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g_T \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \xi} &= K \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g_T \rho \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \rho K \text{Ec} (D_U - 1) g_T \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2. \end{aligned}$$

Подставив уравнение состояния, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= K \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \xi} &= K \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + K \text{Ec} (D_U - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2. \end{aligned}$$

Для того, чтобы представленные выше уравнения были записаны в виде уравнений Прандтля, можно растянуть систему координат:

$$x_1 = \frac{x}{K}, \quad y_1 = \frac{y}{K}.$$

В дальнейшем для упрощения формы записи нижний индекс “1” будет опущен. Полученная система уравнений разбивается на две – определение поля скорости (первые два уравнения системы) и определение поля температуры. Первая из перечисленных систем с граничными условиями аналогична задаче Блазиуса с ненулевой продольной компонентой скорости на стенке. Для решения этой системы введем автомодельную переменную η и функцию тока ψ_{bl} :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\xi}{\sqrt{x}}, \\ \psi_{bl} &= \sqrt{x} \varphi(\eta). \end{aligned}$$

Тогда $u = \varphi'(\eta)$ и $\tilde{v} = (\eta\varphi' - \varphi) / (2\sqrt{x})$. Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \quad (5.2.1)$$

с краевыми условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = D_U, \quad \varphi'(\infty) = 1. \quad (5.2.2)$$

В том же предположении о существовании автомодельного решения, уравнение энергии переписывается в виде:

$$2T'' + \varphi T' + 2\text{Ec}(D_U - 1)(\varphi'')^2 = 0.$$

Его решение:

$$T = -\frac{1}{2}\text{Ec}(D_U - 1)\varphi'^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\text{Ec}(D_U^2 - 1)\right)\varphi' - \frac{1}{2}\text{Ec}(D_U - 1)D_U. \quad (5.2.3)$$

Получаем, что температура T – квадратичная функция продольной компоненты скорости u .

5.3 Определение параметров дисперсной фазы в задаче о течении запыленного газа в пограничном слое на подвижной стенке

Для определения параметров дисперсной фазы используется полный лагранжев метод, который позволяет перейти от исходной системы уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (5.1.5) с граничными условиями (5.1.8) или (5.1.9) и конечному соотношению для расчета числовой концентрации частиц:

$$D_U n_s(0, y_0) = n_s(t, y_0) \cdot \left| u_s \frac{\partial y}{\partial y_0} - v_s \frac{\partial x}{\partial y_0} \right|$$

или для второго случая

$$n_s(0, y_0) \cdot v_s(0, y_0) = n_s(t, y_0) \cdot \left| v_s \frac{\partial x}{\partial x_0} - u_s \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|.$$

Для определения значения концентрации продифференцируем исходную систему уравнений по параметру z , где z в зависимости от постановки либо y_0 , либо x_0 (ордината начала траектории для первого типа граничных условий или абсцисса начала траектории для второго типа граничных условий).

Введем вспомогательные переменные:

$$e_1 = \frac{\partial x}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial y}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial u_s}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial v_s}{\partial z}.$$

На фиксированной траектории частиц получаем систему, состоящую из 8 обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s, & (5.3.1) \\ \frac{du_s}{dt} &= K g_T (u - u_s) \Psi_{st}, \\ \frac{dv_s}{dt} &= K g_T (v - v_s) \Psi_{st} - \zeta \sqrt{K} \sqrt{\rho g_T \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \Psi_{saf} - \omega, \\ \frac{de_1}{dt} &= e_3, \quad \frac{de_2}{dt} = e_4, \\ \frac{de_3}{dt} &= K (u - u_s) \Psi_{st} \frac{\partial g_T}{\partial z} + K g_T \Psi_{st} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - e_3 \right) + K g_T (u - u_s) \frac{\partial \Psi_{st}}{\partial z}, \\ \frac{de_4}{dt} &= K (v - v_s) \Psi_{st} \frac{\partial g_T}{\partial z} + K g_T \Psi_{st} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - e_4 \right) + K g_T (v - v_s) \frac{\partial \Psi_{st}}{\partial z} - \\ &\quad - \zeta \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \Psi_{saf} - \zeta \sqrt{K} \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - e_3 \right) \Psi_{saf} - \\ &\quad - \zeta \sqrt{K} \sqrt{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \frac{\partial \Psi_{saf}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Начальные условия следующие:

$$t = 0 : u_s = D_U, \quad v_s = 0, \quad T_s = D_U, \quad n_s = n(y_0), \quad e_1 = e_3 = e_4 = 0, \quad e_2 = 1,$$

или

$$\begin{aligned} t = 0 : u_s &\rightarrow D_U, \quad v_s = 0, \quad T_s = D_U, \quad n_s v_s \rightarrow C g_T^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{3/2}, \\ e_1 &= 1, \quad e_2 = e_3 = e_4 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждой траектории частиц имеем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и конечное соотношение для n_s . Производные от функций параметров несущей фазы в правых частях уравнений системы находятся из решения системы уравнений (5.2.1) – (5.2.3). Для пересчета производных используется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{K} \frac{\partial x}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2x\sqrt{x}g_T} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{Kg_T\sqrt{x}} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Движение частиц определяется тремя безразмерными параметрами ζ , χ , Re_{s0} – коэффициент при подъемной силе, отношение теплоемкостей газа и вещества частиц, число Рейнольдса, посчитанное по диаметру частиц.

5.4 Результаты численных расчетов

Поле скорости газа рассчитывалось численно на равномерной по η сетке. Краевая задача (5.2.1) – (5.2.2) решалась методом пристрелки с помощью метода секущих. Решение уравнений (5.2.1), (5.2.3) для несущей фазы сохранялось в виде таблицы, по которой восстанавливалось значение нужного параметра и его производной с использованием линейной интерполяции. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.3.1) для определения параметров дисперсной фазы решалась для различных z методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

В данном разделе приведены результаты численных расчетов при фиксированных значениях $\gamma = 1.4$, $\chi = K = Pr = 1$, $M_- = 2$. Сначала рассмотрен случай постановки задачи, при котором ударная волна движется по запыленному газу – граничные условия (5.1.8).

В задаче о движении ударной волны в запыленном газе без учета подъемной силы траектории частиц отклоняются по направлению к стенке (см. Рис. 5.1). На участке стенки за ударной волной частицы осаждаются на стенку.

Расчеты с учетом поперечной силы $\zeta = 100$, $Re_{s0} = 30$, $\omega = 10^{-4}$ пока-

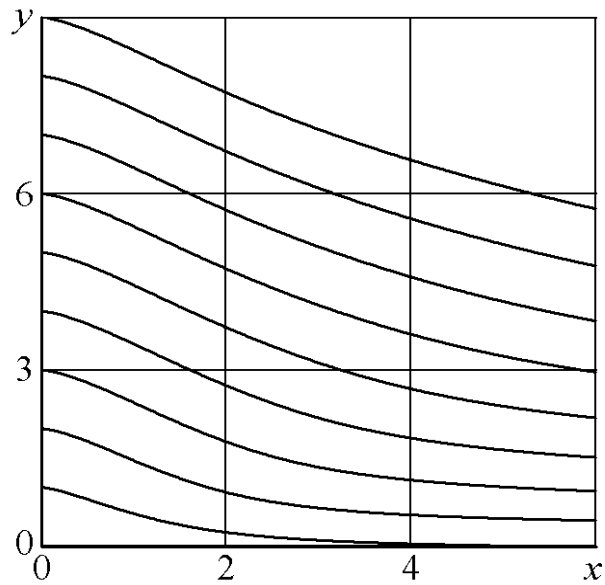


Рис. 5.1: Траектории частиц дисперсной фазы при $\zeta = 0$

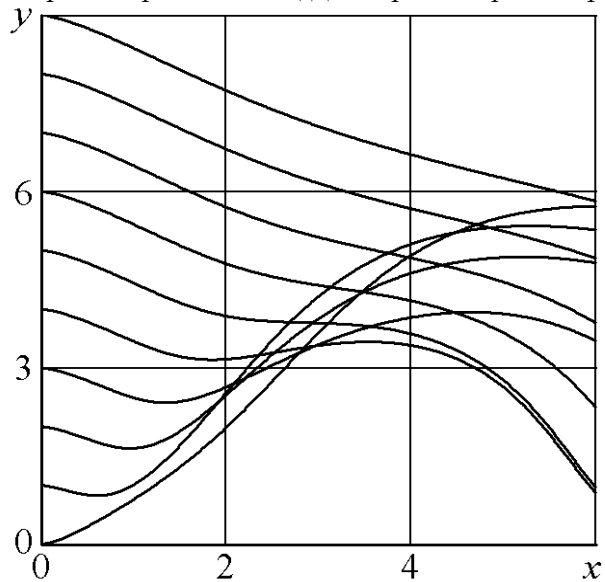


Рис. 5.2: Траектории частиц дисперсной фазы при $\zeta = 100$, $Re_{s0} = 30$, $\omega = 10^{-4}$

зывают, что за ударной волной траектории частиц отклоняются в сторону внешнего потока (см. Рис. 5.2). Вблизи стенки за ударной волной формируется область свободная от частиц, над ней – область пересечения траекторий, в каждую точку которой приходят две траектории. На Рис. 5.3, 5.4, 5.5 показан процесс релаксации фаз по скорости и температуре — приведены профили обеих компонент скорости и температуры частиц в разных сечениях. Штриховыми линиями показаны соответствующие параметры несущей фазы.

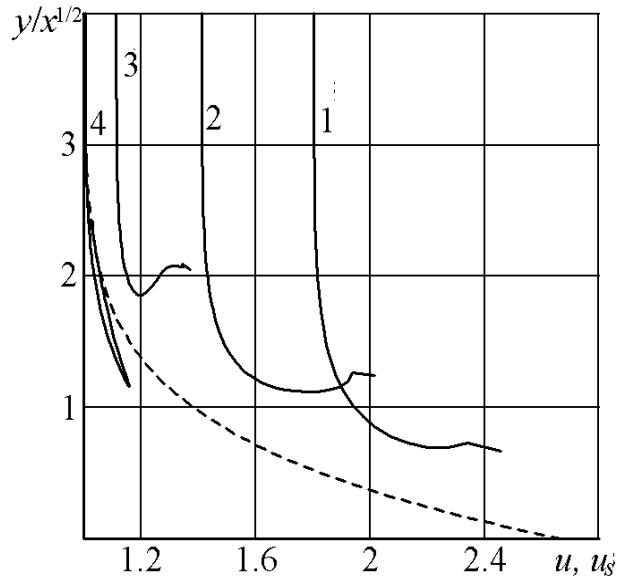


Рис. 5.3: Профили продольной компоненты скорости частиц при $\zeta = 100$, $Re_{s0} = 30$, $\omega = 10^{-4}$ в сечениях $x = 0.5(1), 1(2), 2(3), 5(4)$. Пунктирная линия — продольная компонента скорости несущей фазы.

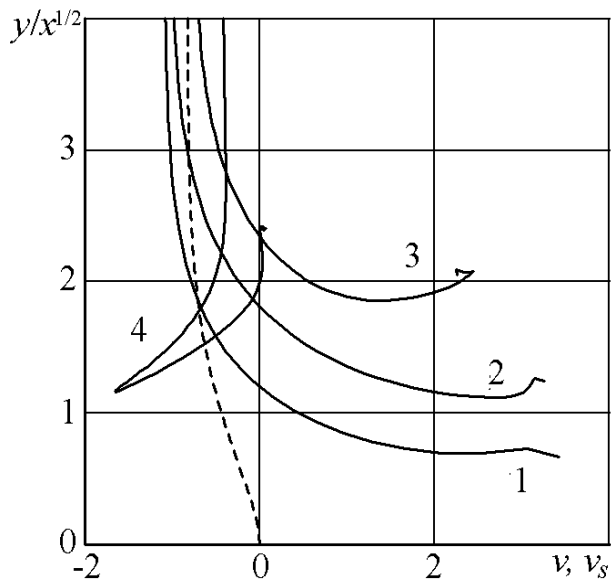


Рис. 5.4: Профили поперечной компоненты скорости частиц при $\zeta = 100$, $Re_{s0} = 30$, $\omega = 10^{-4}$ в сечениях $x = 0.5(1), 1(2), 2(3), 5(4)$. Пунктирная линия — поперечная компонента скорости несущей фазы.

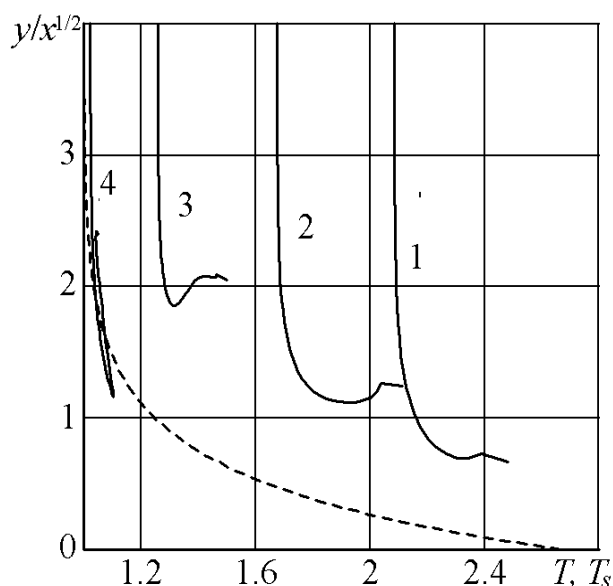


Рис. 5.5: Профили температуры частиц при $\zeta = 100$, $Re_{s0} = 30$, $\omega = 10^{-4}$ в сечениях $x = 0.5(1), 1(2), 2(3), 5(4)$. Пунктирная линия – температура несущей фазы.

Для случая движения ударной волны над слоем осадка (граничные условия (5.1.9)) рассмотрим сначала случай $C = 0$. Крупные частицы (при $\zeta = 1740$, $Re_{s0} = 240$, $\omega = 0.037$), как показано на Рис. 5.6, отрываются от стенки, движутся в сторону внешнего потока, а затем оседают. Траектории частиц при этом имеют довольно сложный вид. На Рис. 5.7, 5.8, 5.9 приведены профили обеих компонент скорости и температуры частиц в различных сечениях по продольной координате, штриховая линия – значения соответствующих параметров несущей фазы.

Мелкие частицы ($\zeta = 55$, $Re_{s0} = 24$, $\omega = 0$) также перемещаются скачкообразно (“сальтируют”) (см. Рис. 5.10). На Рис. 5.11, 5.12, 5.13 показан процесс релаксации фаз по скорости и температуре. Развитие профиля концентрации частиц показано на Рис. 5.14. По оси абсцисс отложена величина J , $|J| = 1/n_s$, правая ветвь значений J соответствует частицам, поднимающимся вверх. Видно, что в поле концентрации частиц формируются особенности на поверхности стенки и на некотором расстоянии от нее, на огибающих траекторий сальтирующих частиц.

На Рис. 5.15 приведена величина $J/n_{s0}v_{s0}$ для последнего случая при $C =$

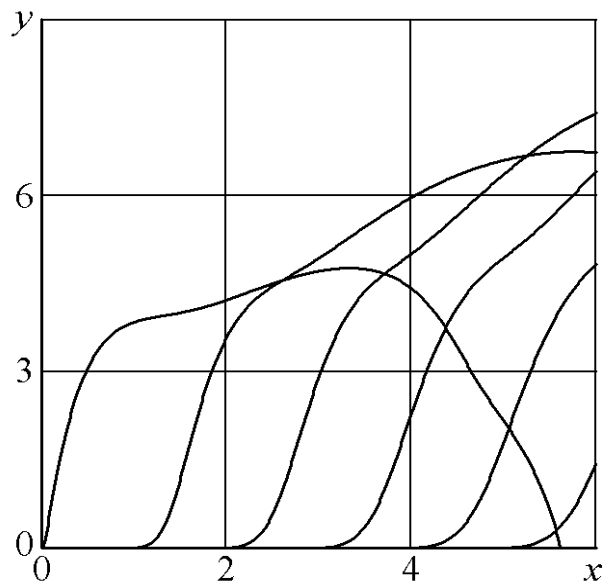


Рис. 5.6: Траектории частиц дисперсной фазы при $\zeta = 1740$, $Re_{s0} = 240$, $\omega = 0.037$

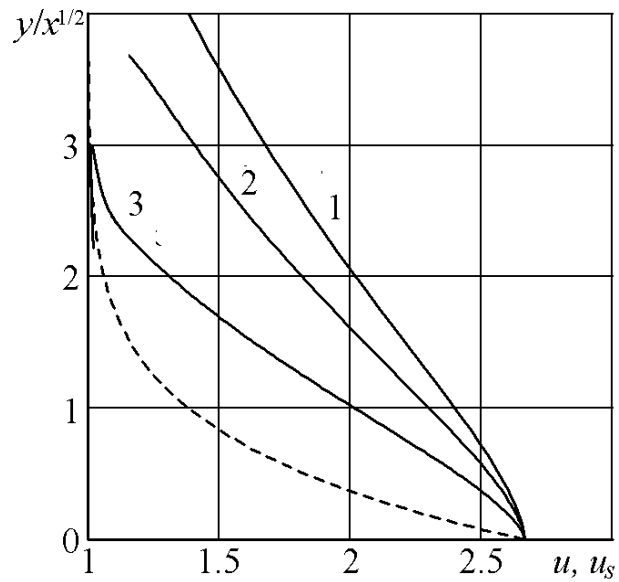


Рис. 5.7: Профили продольной компоненты скорости частиц при $\zeta = 1740$, $Re_{s0} = 240$, $\omega = 0.037$ в сечениях $x = 0.5(1)$, $1(2)$, $4(3)$. Пунктирная линия – продольная компонента скорости несущей фазы.

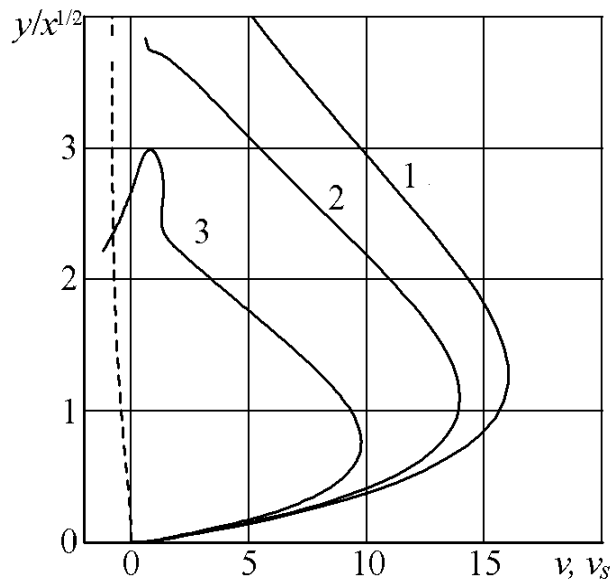


Рис. 5.8: Профили поперечной компоненты скорости частиц при $\zeta = 1740$, $Re_{s0} = 240$, $\omega = 0.037$ в сечениях $x = 0.5(1), 1(2), 4(3)$. Пунктирная линия – поперечная компонента скорости несущей фазы.

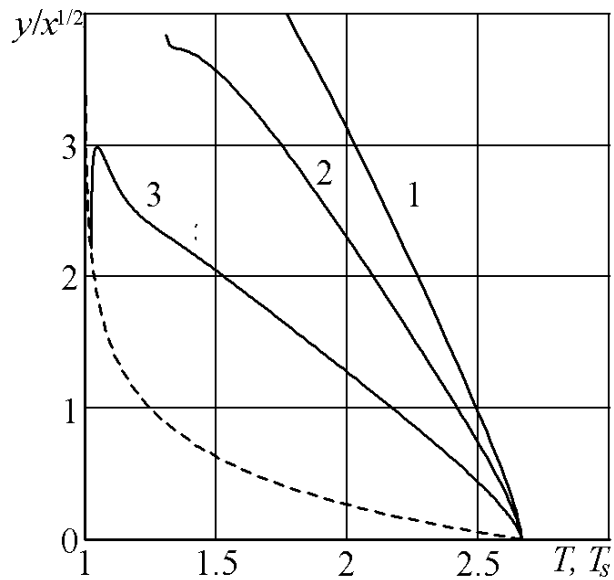


Рис. 5.9: Профили температуры частиц при $\zeta = 1740$, $Re_{s0} = 240$, $\omega = 0.037$ в сечениях $x = 0.5(1), 1(2), 4(3)$. Пунктирная линия – температура несущей фазы.

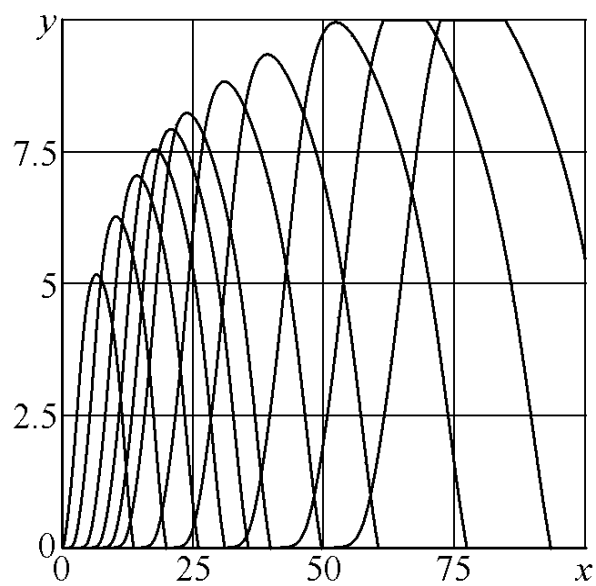


Рис. 5.10: Траектории частиц дисперсной фазы при $\zeta = 55$, $\text{Re}_{s0} = 24$, $\omega = 0$

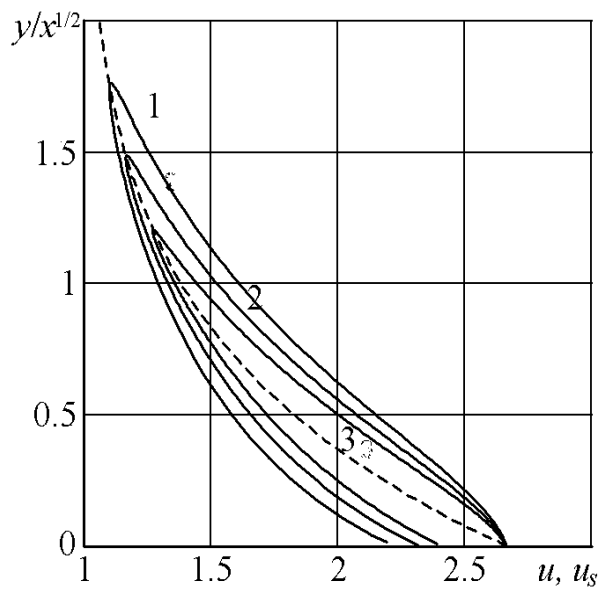


Рис. 5.11: Профили продольной компоненты скорости частиц при $\zeta = 55$, $\text{Re}_{s0} = 24$, $\omega = 0$ в сечениях $x = 20(1)$, $40(2)$, $80(3)$. Пунктирная линия – продольная компонента скорости несущей фазы.

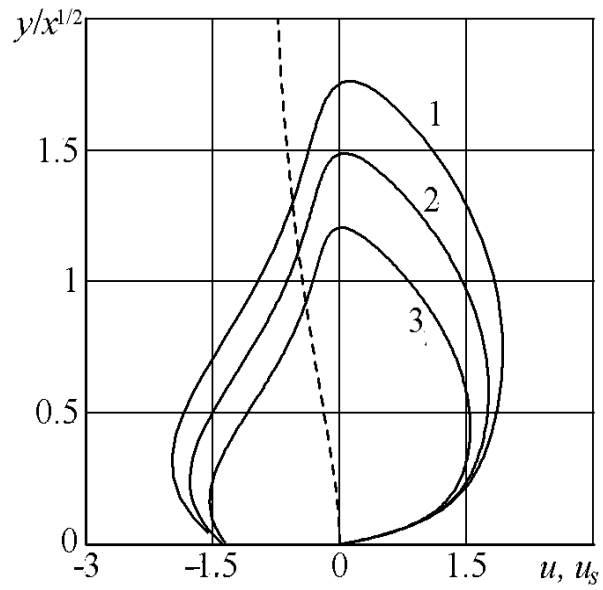


Рис. 5.12: Профили поперечной компоненты скорости частиц при $\zeta = 55$, $Re_{s0} = 24$, $\omega = 0$ в сечениях $x = 20(1), 40(2), 80(3)$. Пунктирная линия – поперечная компонента скорости несущей фазы.

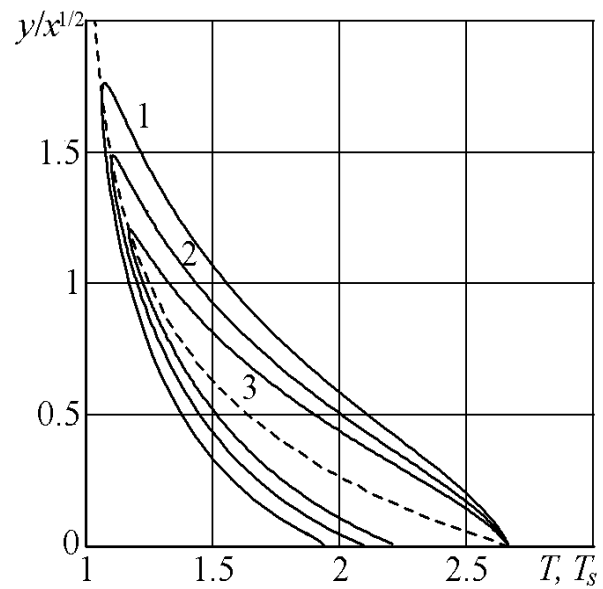


Рис. 5.13: Профили температуры частиц при $\zeta = 55$, $Re_{s0} = 24$, $\omega = 0$ в сечениях $x = 20(1), 40(2), 80(3)$. Пунктирная линия – температура несущей фазы.

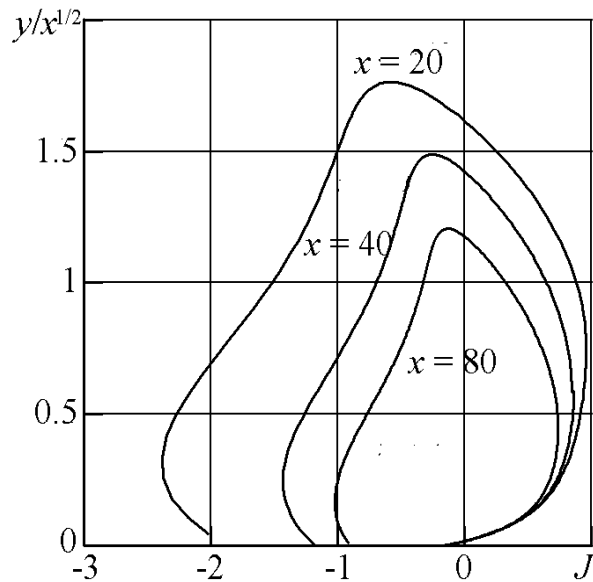


Рис. 5.14: Профили концентрации частиц ($|J| = 1/n_s$) при $\zeta = 55$, $Re_{s0} = 24$, $\omega = 0$ в сечениях $x = 20$), 40, 80

10 (пунктирная линия соответствует $C = 0$). Правые ветви профилей на Рис. 5.15 соответствуют частицам, движущимся вверх, левые – опускающимся частицам. Максимум концентрации частиц достигается на стенке и на границе области взвешенных частиц. Если учитывать зависимость потока частиц со стенки от динамической скорости (условия Багнольда), то концентрация частиц непосредственно за ударной волной оказывается заметно больше, а вдалеке от ударной волны в несколько раз меньше, чем для случая граничных условий, соответствующих постоянному вводу частиц в поток со стенки.

Выводы

Численно исследована задача о подъеме пыли в сжимаемом пограничном слое за движущейся ударной волной. Рассмотрены две постановки задачи, соответствующие движению ударной волны с постоянной скоростью в однородно запыленном вязком теплопроводном газе и движению ударной волны над разрушающимся слоем осадка, поверхность которого остается плоской. При

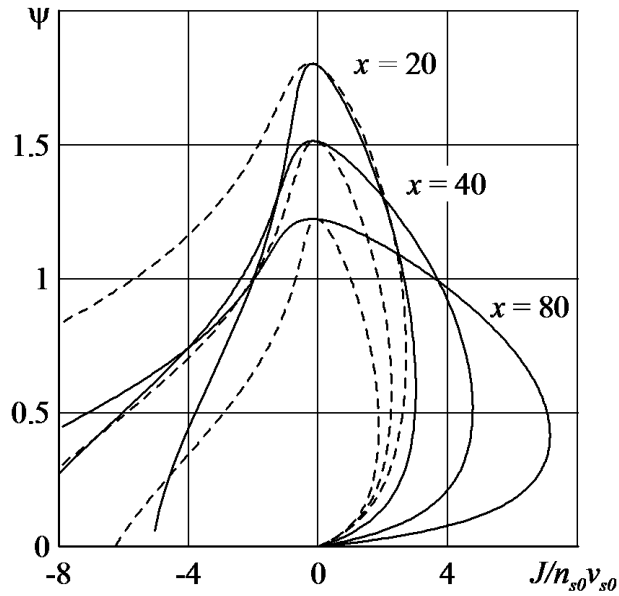


Рис. 5.15: Профили $J/n_{s0}v_{s0}$ при $\zeta = 55$, $Re_{s0} = 24$, $\omega = 0$ (пунктирные линии – профили $J/n_{s0}v_{s0}$ при постоянном подводе частиц со стенки)

описании межфазного обмена импульсом учтено влияние стенки на подъемную силу, действующую на частицы.

Показано, что в пограничном слое за ударной волной, движущейся в запыленном газе вдоль твердой поверхности, непосредственно за волной вблизи стенки формируется область, свободная от частиц, а на некотором расстоянии от стенки возникает узкая область накопления частиц. В случае движения ударной волны над разрушающейся поверхностью слоя осадка в поле концентрации частиц формируются две области накопления частиц – у стенки и на некотором расстоянии от нее, на огибающей траекторий сальтирующих частиц. Учет зависимости массы частиц, вовлекаемых в движение, от местного трения на стеке (условия Багнольда) приводит к существенным количественным изменениям в распределении концентрации пыли в формирующейся за волной зоне двухфазного движения. Учет поправок на присутствие стенки при описании силы Сэфмана не сказывается заметно на распределении дисперсной фазы.

Глава 6. Фокусировка частиц за ударной волной в плоском канале

В данной главе предлагается и исследуется новая аэродинамическая схема фокусировки инерционных частиц, а именно: фокусировка частиц за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в цилиндрическом или плоском микроканале постоянного сечения. Толщина канала предполагается настолько малой, что пограничные слои, нарастающие на стенках канала за ударной волной, смыкаются на длине, сравнимой с длиной скоростной релаксации частиц. В этих условиях движение частицы определяется как силой аэродинамического сопротивления частицы, так и подъемной силой сдвиговой природы, обусловленной неоднородностью потока на масштабе частицы. В определенном диапазоне параметров действие подъемных сил и приводит к аккумуляции частиц на оси канала за ударной волной.

6.1 Постановка задачи о течении запыленного газа за ударной волной в узком канале

Рассматриваются осесимметричная и плоская задачи о течении запыленного газа за прямой ударной волной, распространяющейся в цилиндрическом (плоском) канале диаметра (ширины) $2d$, имеющем конечную длину l_{ch} , $d \ll l_{ch}$. Предполагается, что на длине канала ударная волна движется с постоянной скоростью по однородно запыленному покоящемуся газу. Стенки канала равномерно нагреты, температура стенок совпадает с температурой газа перед ударной волной. Приняты основные предположения двухконтинуальной модели запыленного газа. Несущая фаза – вязкий совершенный газ, вязкость и теплоемкость которого линейно зависят от температуры. Дисперсные вклю-

чения – одинаковые сферы радиуса σ , массы m , объемная доля частиц пренебрежимо мала. Массовая концентрация частиц предполагается малой, и их влиянием на параметры несущей фазы пренебрегается. Параметры несущей фазы перед и за ударной волной связаны стандартными соотношениями Рэнкина-Гюгонио. Параметры частиц при прохождении ударной волны непрерывны. В межфазном обмене импульсом учитываются сила аэродинамического сопротивления и подъемная сила Сэфмана, возникающая из-за неоднородности потока. Поскольку за ударной волной рассогласование скоростей фаз может быть значительным, учитываются поправки к силе Стокса и силе Сэфмана на конечность чисел Рейнольдса обтекания частиц в форме, предложенной в работах (Carlson, Hoglund, 1964; Mei, 1992) [44, 80].

Вводится подвижная система координат, связанная с ударной волной – цилиндрическая для осесимметричного случая, декартова для плоского случая. Ось x направлена по потоку вдоль оси симметрии канала, ось y – от оси симметрии к стенкам канала. В этой системе отсчета задача становится стационарной. Общая система уравнений несущей фазы имеет вид (здесь и далее нижние индексы “–” и “+” относятся к параметрам газа перед и за ударной волной):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho^* \mathbf{v}^* &= 0, \\ \rho^* (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* &= \nabla_i \mathbf{p}^{*i}, \\ p_{ij}^* &= -p^* g_{ij} - \frac{2}{3} \mu^* g_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}^* + \mu^* (\nabla_i v_j^* + \nabla_j v_i^*), \\ \rho^* c_p (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) T^* &= \operatorname{div} (\lambda \nabla T^*) + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) p^* + \Phi, \\ \Phi &= \mu^* \left[-\frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v}^*)^2 + 2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{v^*}{y^*} \right)^{2r} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right], \\ \frac{\mu^*}{\mu_+} &= \frac{\lambda^*}{\lambda_+} = K \frac{T^*}{T_+}, \\ p^* &= \rho^* R T^*. \end{aligned}$$

Система уравнений дисперсной фазы такова:

$$\operatorname{div} \rho_s^* \mathbf{v}_s^* = 0,$$

$$m(\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) \mathbf{v}_s^* = \mathbf{f}_s^*,$$

$$c_s(\mathbf{v}_s^* \cdot \nabla) T_s^* = q_s^*.$$

Здесь p_{ij}^* – компоненты тензора напряжений несущей фазы; g_{ij} – компоненты метрического тензора, K – константа; R – газовая постоянная, $r = 1$ для цилиндрического канала, 0 для плоского канала; остальные обозначения общепринятые. Выражение для силы, действующей на одну частицу, имеет вид:

$$\mathbf{f}_s^* = 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*)\Psi_{st} + \text{sign}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) 6.46\sigma^2 \sqrt{\mu^*\rho^* \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|} (u^* - u_s^*)\mathbf{j}\Psi_{saf},$$

$$\Psi_{st} = \left(1 + \frac{1}{6}\text{Re}_s^{2/3}\right) (1 + \exp(-0.427\text{M}_s^{-4.63})),$$

$$\Psi_{saf} = 0.4687(1 - \exp(-0.1\text{Re}_s)) \left(\frac{\text{Re}_g}{\text{Re}_s}\right)^{1/2} + \exp(-0.1\text{Re}_s) \quad (\text{Re}_s < 40),$$

$$\Psi_{saf} = 0.0741\text{Re}_g^{1/2} \quad (\text{Re}_s > 40),$$

$$\text{Re}_s = \frac{2\sigma\rho^*|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*|}{\mu^*}, \quad \text{M}_s = \frac{|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_s^*|}{a^*}, \quad \text{Re}_g = \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right| \frac{\sigma^2\rho^*}{\mu^*}.$$

Используются выражения для поправочных функций Ψ_{st} и Ψ_{saf} , предложенные в работах (Carlson, Hoglund, 1964; Mei, 1992) [44, 80]. Поток тепла от несущей фазы к частице задается соотношением (Ranz, Marshall, 1952) [95]:

$$q_s^* = 4\pi\sigma\lambda^*(T^* - T_s^*)\Psi_h,$$

$$\Psi_h = 1 + 0.3\text{Pr}^{1/3}\text{Re}_s^{1/2}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p\mu_+^*}{\lambda_+^*}.$$

Здесь Pr – число Прандтля. Выражения для сил и потока тепла с данными поправками применимы для широкого диапазона чисел Рейнольдса обтекания частиц.

Характерными величинами, которые естественно взять за масштабы при обезразмеривании, являются значения параметров газа сразу за ударной волной в невязкой области течения (ниже они отмечены индексом “плюс”). Задача содержит малый параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}_d} \ll 1,$$

где $\text{Re}_d = \rho_+^* U_+ d / \mu_+^*$ – число Рейнольдса, посчитанное по радиусу канала и параметрам газа сразу за ударной волной. Кроме длины канала введем дополнительно продольный масштаб $L = d/\varepsilon$, на котором пограничные слои, нарастающие на стенках канала, заведомо перекрываются. Отметим, что стационарное решение в области за ударной волной (в системе координат, связанной с волной) может существовать лишь на конечной длине, пока не произойдет “запирание” потока, что связано с заданностью расхода газа через канал постоянного сечения, на стенках которого одновременно подводится импульс и отводится тепло. В дальнейшем предполагается, что длина канала $l_{ch} = AL$, ($A \sim O(1)$) не превосходит области существования стационарного решения за волной.

Основные параметры задачи приведем к безразмерному виду следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{d}, \quad u = \frac{u^*}{U_+}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon U_+}, \\ u_s &= \frac{u_s^*}{U_+}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{\varepsilon U_+}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s0}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_+}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_+ U_+^2}, \\ T &= \frac{T^* (U_{sh} - U_+) + U_+ T_w - U_{sh} T_+}{(T_w - T_+) U_+}, \\ T^* &= \frac{(T_w - T_+) U_+ T - U_+ T_w + U_{sh} T_+}{(U_{sh} - U_+)}. \end{aligned}$$

Здесь n_{s0} – характерное значение концентрации дисперсной фазы перед ударной волной. Температуры газа и частиц нормированы таким образом, чтобы безразмерные температура и продольная компонента скорости изменялись в одинаковых пределах. Для более короткой записи вводятся вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} D_T &= \frac{T_w}{T_+}, \quad D_U = \frac{U_{sh}}{U_+}, \\ g(T) &= \frac{(D_T - 1) T - D_T + D_U}{(D_U - 1)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$T^* = T_+ g, \quad \mu^* = \mu_+ K g, \quad \lambda^* = \lambda_+ K g.$$

Упростим постановку задачи, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Для несущей фазы получаем систему уравнений типа уравнений сжимаемого пограничного слоя (2.1.8), но с неизвестным продольным распределением давления несущей фазы в канале:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \left(\frac{\rho v}{y} \right)^r &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + K \frac{1}{y^r} \frac{\partial}{\partial y} \left(g y^r \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \text{Ec}(D_U - 1) u \frac{dp}{dx} + K \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{y^r} \frac{\partial}{\partial y} \left(g y^r \frac{\partial T}{\partial y} \right) + K \text{Ec}(D_U - 1) g \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ \text{Ec} &= \frac{(\gamma - 1) M_+^2}{D_T - 1}. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Здесь Ec – число Эккерта. Данная система уравнений дополняется уравнением состояния и условием сохранения расхода:

$$\rho g = \gamma M_+^2 p, \quad \int_0^1 \rho u y^r dy = 2^{-r}. \quad (6.1.2)$$

Граничные условия для несущей фазы таковы:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 < y < 1 : \quad u = 1, \quad v = 0, \quad T = 1, \quad \rho = 1, \quad p = \frac{1}{\gamma M_+^2}, \\ 0 \leq x \leq A, \quad y = 1 : \quad u = D_U, \quad v = 0, \quad T = D_U, \\ 0 \leq x \leq A, \quad y = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Для нахождения параметров среды частиц использовался лагранжев метод. Согласно этому методу для каждой траектории частиц можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из решения которой находятся все параметры дисперсной фазы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u_s, \quad \frac{dy}{dt} = v_s, \quad \frac{du_s}{dt} &= K \beta g (u - u_s) \Psi_{st}, \\ \frac{dv_s}{dt} &= K \beta g (v - v_s) \Psi_{st} + \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta \sqrt{K} \sqrt{\rho g \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} (u - u_s) \Psi_{saf}, \\ \frac{dT_s}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{K}{\text{Pr}} \beta \chi g (T - T_s) \Phi_h. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Начальные условия, соответствующие началу траектории на ударной волне, имеют вид:

$$t = 0 : x = 0, y = y_0, u_s = D_U, v_s = 0, T_s = D_U.$$

Здесь y_0 – лагранжева координата, равная ординате начала траектории на ударной волне. Взаимодействие частиц со стенкой не рассматривается.

Таким образом, в задаче четыре безразмерных параметра определяют течение несущей фазы: γ , M_+ , Pr , K – показатель адиабаты газа, число Маха газа за ударной волной, число Прандтля, коэффициент пропорциональности в зависимости вязкости и теплопроводности от температуры. Вместо числа Маха за волной можно использовать число Маха волны M_- , которое связано с M_+ следующим соотношением:

$$2\gamma M_-^2 M_+^2 - (\gamma - 1) (M_-^2 + M_+^2) = 2.$$

Среду частиц характеризуют безразмерные параметры β , ζ , Re_{s0} и χ – параметр инерционности частиц, коэффициент при подъемной силе, число Рейнольдса, посчитанное по диаметру частиц, и отношение теплоемкостей газа и вещества частиц:

$$\beta = \frac{9}{2} \frac{\rho_+}{\rho_{sm}} \left(\frac{\sigma}{d} \right)^{-2}, \quad \zeta = 0.545 (Re_{s0})^{3/2} \left(\frac{\sigma}{d} \right)^{-5/2} \frac{\rho_+}{\rho_{sm}},$$

$$\chi = \frac{c_p}{c_s}, \quad Re_{s0} = \frac{2\rho_+\sigma U_+}{\mu_+}.$$

Еще один параметр σ/d выражается через основные параметры следующим образом:

$$\frac{\sigma}{d} = 0.015 Re_{s0}^3 \left(\frac{\beta}{\zeta} \right)^2.$$

Числа Рейнольдса и Маха обтекания частиц выражаются через основные безразмерные параметры:

$$Re_s = Re_{s0} \frac{\rho |u - u_s|}{Kg}, \quad M_s = \frac{|u - u_s|}{\sqrt{\gamma p / \rho}}, \quad Re_g = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{d} Re_{s0} \frac{\rho}{Kg} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

В таблице ниже приведены некоторые характерные значения параметров, соответствующие возможным реальным условиям.

Таблица 6.1 Характерные значения параметров, соответствующие распространению слабой ударной волны по каналу с $2d = 5 \cdot 10^{-4}$ м, заполненному аэрозолем с частицами, плотность вещества которых

$$\rho_{sm} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$2\sigma,$ 10^{-6} м	M_*	ε	β	ζ	Re_{s0}	$l_{ch}, 10^{-2}$ м, цилиндри- ческий канал	$l_{ch},$ 10^{-2} м, плоский канал
10	1.1	$6.12 \cdot 10^{-4}$	6.6	10^3	32.7	2	12.4
10	1.5	$1.09 \cdot 10^{-4}$	10	$2.2 \cdot 10^4$	183.2	4.6	27
10	2	$5.41 \cdot 10^{-5}$	15	$9 \cdot 10^4$	369.6	6.1	24.4
1	1.1	$6.12 \cdot 10^{-4}$	$6.6 \cdot 10^2$	10^4	3.3	2	12.4
1	1.5	$1.09 \cdot 10^{-4}$	10^3	$2.2 \cdot 10^5$	18.3	4.6	27
1	2	$5.41 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^5$	37	6.1	24.4

6.2 Обсуждение результатов

Сформулированная выше задача для несущей фазы аналогична задаче о течении вязкого сжимаемого газа в начальном участке канала с подвижными стенками. С развитием течения по продольной координате от ударной волны ступенчатые профили скорости и температуры должны трансформироваться в профили, формирующихся при смыкании динамических и тепловых пограничных слоев, нарастающих на стенках канала. Система уравнений (6.1.1) с уравнением состояния и условием заданного расхода (6.1.2) и граничными условиями (6.1.3) решается численно конечно-разностным методом на равномерной сетке. Используется неявная схема первого порядка по продольной координате и второго порядка по поперечной координате. На каждом шаге по продольной координате параметры газа находятся методом прогонки. Поскольку распределение давления неизвестно, используется дополнитель-

ная итерационная процедура, связывающая значение давления на следующем шаге с расходом газа в канале. Искомое значение давления определяется с помощью метода секущих из условия выполнения заданного расхода.

Некоторые результаты расчетов для цилиндрического и плоского каналов приведены на Рис. 6.1 – 6.8. В расчетах было положено: $Pr = 1$, $K = 1$, $\gamma = 1.4$; $M_- = 1.1$, $A = 0.095$ для осесимметричного случая, $M_- = 2$, $A = 0.1$ для плоского случая. Рисунки 6.1 – 6.4 показывают развитие профилей продольной компоненты скорости и температуры по продольной координате (в сечениях $x = 0.01, 0.05, A$). Стенки канала движутся быстрее, чем газ в середине канала, вследствие трения происходит эжекция газа в направлении движения стенок. При этом, в силу постоянства расхода, на оси канала скорость газа уменьшается (на Рис. 6.5, 6.6 представлены изомахи течения). Такое течение развивается при монотонном увеличении давления, которое представлено на Рис. 6.7, 6.8. Видно, что давление выходит на практически линейную зависимость от x . Ниже по течению плотность газа на оси канала убывает, поперечная компонента скорости по модулю уменьшается.

Расчеты продолжались до сечения, в котором наступает “запирание” потока, т.е. появление возвратного течения на оси канала, что в численной реализации проявляется в невозможности обеспечить условие заданного расхода газа. Поля параметров несущей фазы, рассчитанные на эйлеровой сетке, сохранялись в виде таблиц. При нахождении параметров частиц использовалась интерполяция табличных данных полиномами второго порядка.

На выбранных траекториях частиц параметры дисперсной фазы определялись численно из решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1.4) методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Проведенное параметрическое исследование показало, что, как в осесимметричном, так и в плоском случае, существует три характерных режима движения частиц – частицы движутся к стенкам канала; частицы движутся к оси симметрии канала; частицы многократно пересекают ось симметрии канала, при этом амплитуда колебания около оси канала уменьшается. Эти

режимы течения соответствуют различным соотношениям между параметром инерционности частиц и параметром при подъемной силе. В случае малой инерционности частиц ($\beta > 10^3$, что для миллиметрового канала соответствует частицам с размером порядка одного микрона и меньше) они увлекаются несущей фазой и движутся от оси к стенкам канала. Действие подъемной силы на такие частицы мало по сравнению с действием силы аэродинамического сопротивления. Такая же картина течения имеет место и в предельном случае, когда подъемная сила не учитывается. Движение более крупных частиц ($\beta < 10^3$) происходит по качественно другому сценарию. На некотором расстоянии от ударной волны частицы, первоначально двигавшиеся по направлению к стенкам, меняют направление движения и начинают двигаться к оси канала (на Рис. 6.9 – 6.11 представлены примеры расчетов траекторий частиц при $M_- = 2$ и $M_- = 1.1$ для осесимметричного случая и при $M_- = 1.5$ для плоского случая). Такое поведение траекторий частиц объясняется тем, что в областях с большим поперечным градиентом продольной компоненты скорости влияние подъемной силы на частицы очень существенно. При этом вблизи стенок канала формируется область, свободная от частиц. На Рис. 6.9 представлена характерная картина движения инерционных частиц, соответствующая второму режиму течения, на Рис. 6.11 – третьему. Интересующий нас режим фокусировки может быть реализован как во втором, так и в третьем режимах течения. На основании параметрических расчетов выявлен значительный диапазон определяющих параметров, в котором происходит ярко выраженная фокусировка частиц на оси канала. Пример режима фокусировки частиц приведен на Рис. 6.10. Возможны случаи, когда частицы фокусируются на оси симметрии канала после многократного пересечения оси канала с уменьшающейся амплитудой колебания.

Следует отметить, что фокусировка частиц на оси канала приводит к значительному уменьшению среднего расстояния между частицами. При увеличении исходной концентрации частиц, возможные межчастичные взаимодействия могут привести к ослаблению эффекта фокусировки.

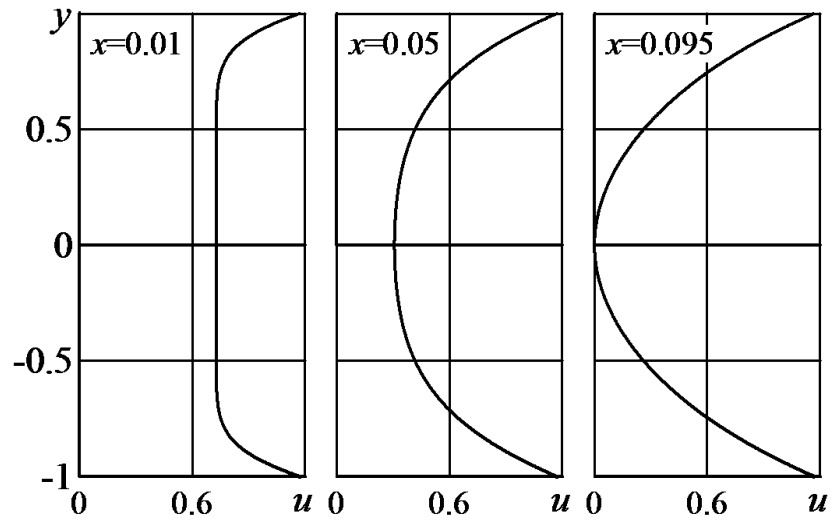


Рис. 6.1: Профили безразмерной продольной компоненты скорости в цилиндрическом канале, $M_- = 1.1$.

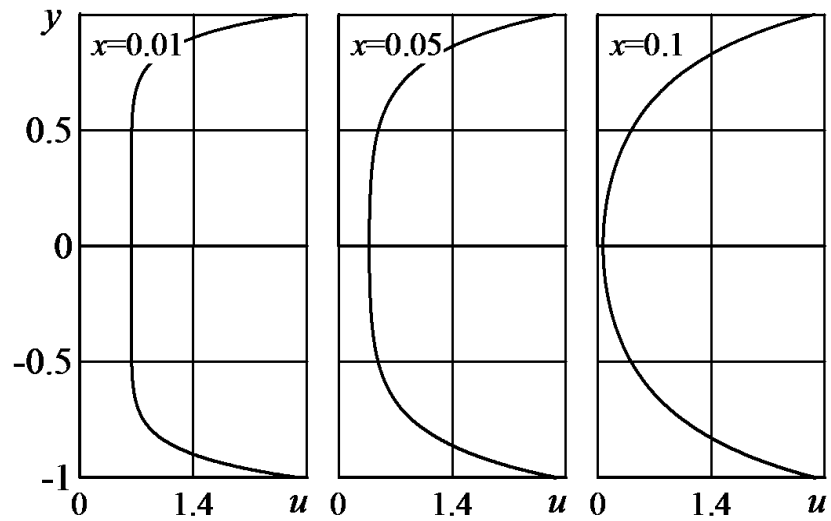


Рис. 6.2: Профили безразмерной продольной компоненты скорости в плоском канале, $M_- = 2$.

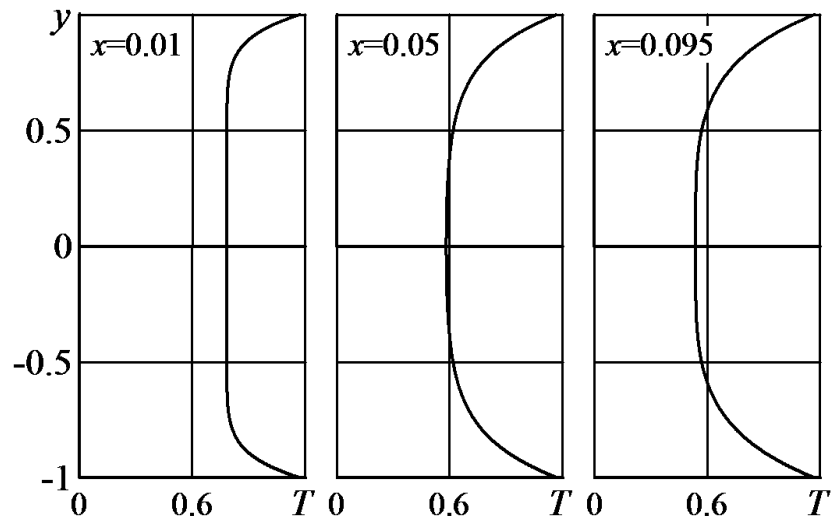


Рис. 6.3: Профили безразмерной температуры газа в цилиндрическом канале, $M_{\infty} = 1.1$.

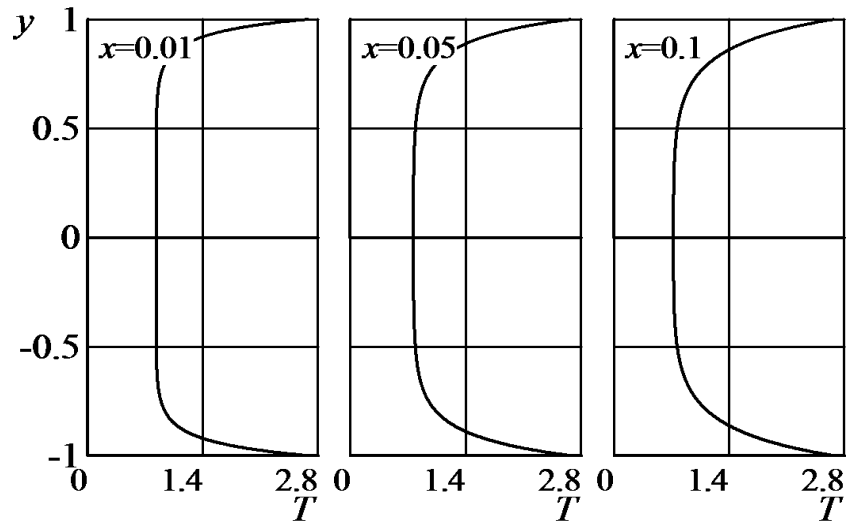


Рис. 6.4: Профили безразмерной температуры газа в плоском канале, $M_{\infty} = 2$.

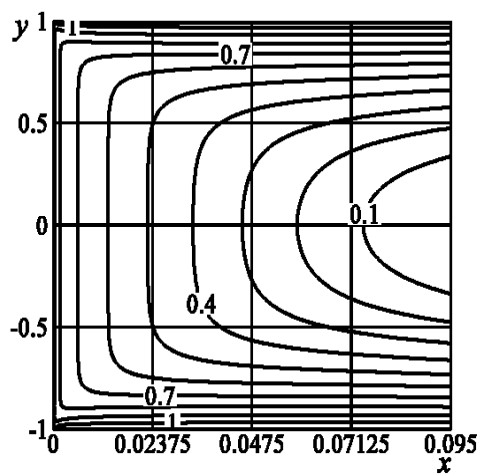


Рис. 6.5: Изомахи течения в цилиндрическом канале, $M_\infty = 1.1$.

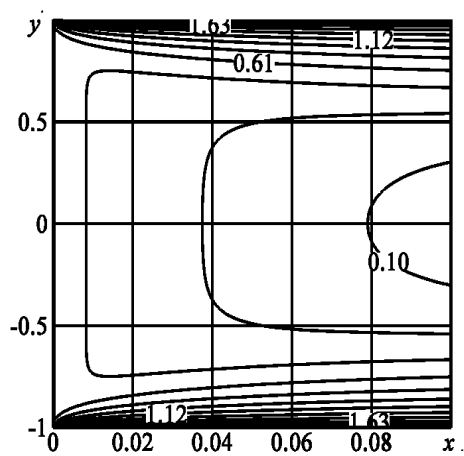


Рис. 6.6: Изомахи течения в плоском канале, $M_\infty = 2$.

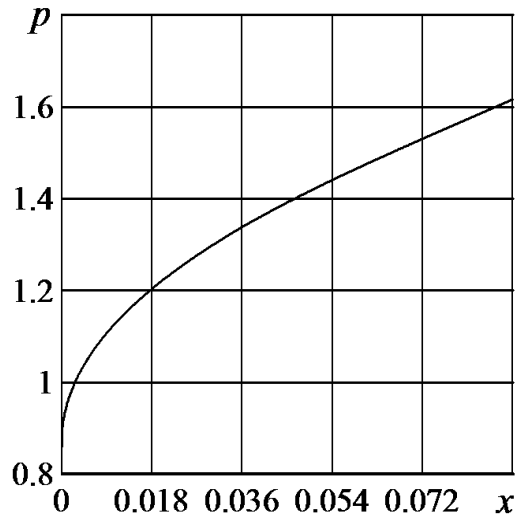


Рис. 6.7: Распределение безразмерного давления за ударной волной вдоль оси канала в цилиндрическом канале, $M_{\infty} = 1.1$.

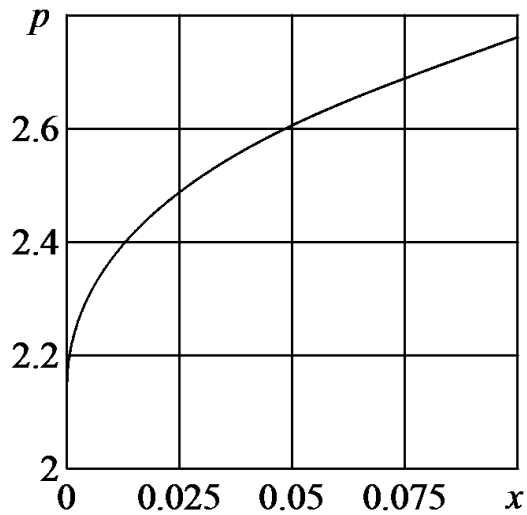


Рис. 6.8: Распределение безразмерного давления за ударной волной вдоль оси канала в плоском канале, $M_{\infty} = 2$.

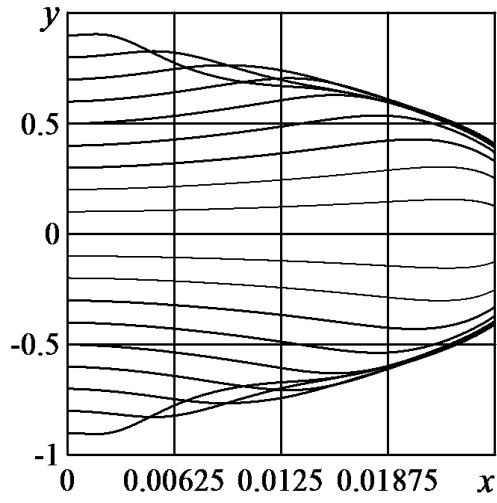


Рис. 6.9: Траектории частиц при $M_\infty = 2$, $\beta = 30$, $\zeta = 36 \cdot 10^4$, $Re_{s0} = 370$ в цилиндрическом канале.

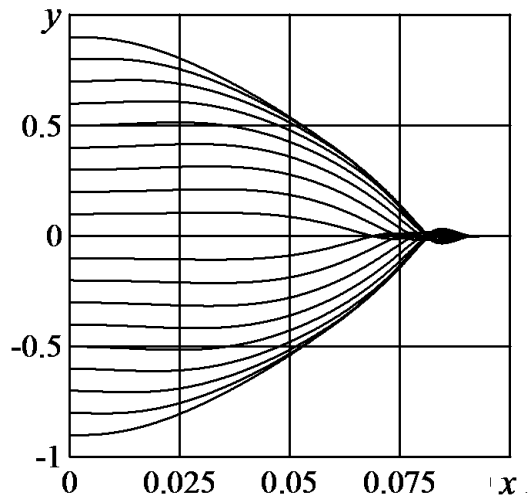


Рис. 6.10: Траектории частиц при $M_\infty = 1.1$, $\beta = 13$, $\zeta = 4.2 \cdot 10^3$, $Re_{s0} = 33$ в цилиндрическом канале.

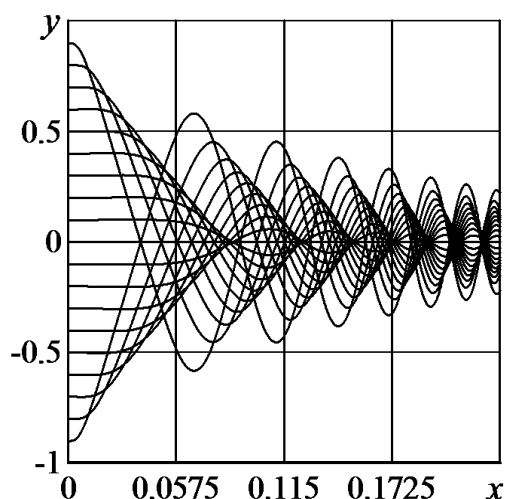


Рис. 6.11: Траектории частиц при $M_- = 1.5$, $\beta = 0.2$, $\zeta = 8.9 \cdot 10^3$, $Re_{s0} = 1.8 \cdot 10^3$ в плоском канале.

Выводы

В рамках модели взаимопроникающих континуумов при малой концентрации частиц решена задача о течении запыленного газа за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в узком плоском или осесимметричном канале. В межфазном обмене импульсом, кроме силы аэродинамического сопротивления частиц, учтена подъемная сила Сэфмана. На основании численных расчетов показано, что могут реализоваться три режима движения частиц: 1) частицы монотонно движутся по направлению к стенкам канала; 2) частицы движутся по направлению к оси симметрии канала; 3) траектории частиц многократно пересекают ось симметрии канала с постепенно уменьшающейся амплитудой. Различным режимам соответствуют различные соотношения между силой аэродинамического сопротивления и подъемной силы. Малоинерционные частицы движутся к стенкам канала. Для более инерционных частиц эффект влияния поперечных сил, возникающих из-за неоднородности потока на масштабе частицы, более выражен. Обнаружен диапазон параметров, для которого имеет место эффект фокусировки частиц на оси симметрии канала. Для каналов диаметром порядка 10^{-3} м и слабых ударных волн

эффект фокусировки наиболее выражен для частиц с диаметром порядка 10^{-5} м.

Заключение

1. С целью исследования роли боковых сил сдвиговой природы (сил Сэфмана), действующих на инерционные дисперсные частицы в высокоградиентных сдвиговых течениях, в рамках модифицированного двухжидкостного подхода, допускающего пересечения траекторий частиц, проведено численное моделирование ряда ламинарных течений типа двухфазного пограничного слоя. Изучено влияние подъемных сил на формирование неоднородных поперечных профилей концентрации дисперсной фазы в рассмотренных течениях, и показана возможность использования эффекта боковой миграции примеси для создания коллимированных пучков микрочастиц.

Модель двухфазного пограничного слоя развита на случай учета в межфазном взаимодействии сил нестационарной природы (присоединенных масс, Архимеда и Бассэ-Буссинеска), а также сил Сэфмана с поправками на конечность чисел Рейнольдса и наличие стенки.

2. На примере задач о течении запыленного газа в пограничном слое у вертикальной плоской стенки и разреженной суспензии у горизонтальной стенки проведено параметрическое численное исследование профилей концентрации дисперсной фазы, формирующихся в пограничном слое. Получено качественное совпадение рассчитанных профилей концентрации частиц с имеющимися в литературе экспериментальными данными. Показано, что учет поперечной силы правильно описывает экспериментальные эффекты локальных максимумов концентрации частиц внутри пограничного слоя и уменьшения концентрации вблизи стенки.

3. На примере задачи о течении запыленного газа в пристенной струе получены предельные автомодельные профили концентрации частиц, формирующиеся в дальнем поле струи с завершением скоростной релаксации фаз. Показано, что у стенки и в средней части поля струи возникают узкие зоны накопления частиц. В случае стоксовской межфазной силы при некоторых условиях ввода частиц в поток возможны пересечения траекторий дисперсной фазы. Учет подъемных сил Сэфмана приводит к качественному изменению распределения примеси в струе. При значениях коэффициента при силе Сэфмана порядка единицы и более происходит осаждение частиц на начальном участке стенки. С увеличением коэффициента при силе Сэфмана в поле струи возникают множественные пересечения траекторий частиц.
4. Численно исследованы эффекты подъема пыли в двухфазном сжимаемом пограничном слое за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью вдоль плоской твердой стенки в запыленном газе и над эродирующим слоем дисперсного осадка. Показана возможность формирования узких зон накопления дисперсной фазы на огибающих траекторий сальтирующих частиц. Новыми элементами в рассмотренных постановках задач был учет современных литературных данных о поправках к силе Сэфмана на конечность чисел Рейнольдса и наличие стенки, а также учет зависимости потока частиц, вовлекаемых в движение из слоя осадка, от локальной динамической скорости.
5. Впервые исследована задача о движении вязкого запыленного газа за ударной волной, распространяющейся с постоянной скоростью в плоском или осесимметричном микроканале постоянного сечения и конечной длины. Толщина канала сопоставима с толщиной пограничных слоев, нарастающих на стенках канала за ударной волной, на длинах порядка длины скоростной релаксации частиц. Показано, что в зависимости от значений определяющих параметров (главным образом, коэффициента

при силе Сэфмана) могут реализоваться три режима движения частиц: 1) частицы монотонно движутся к стенкам канала; 2) частицы движутся по направлению к оси симметрии канала; 3) траектории частиц осциллируют и многократно пересекают ось симметрии канала с постепенно уменьшающейся амплитудой. На основании параметрических численных расчетов обнаружен диапазон параметров, для которого имеет место эффект фокусировки частиц на оси симметрии канала и формирования коллимированного пучка частиц. Для каналов диаметром порядка 10^{-3} м и слабых ударных волн эффект фокусировки наиболее выражен для частиц с диаметром порядка 10^{-5} м.

Литература

- [1] Акатнов Н.И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки // Труды ЛПИ им. М. И. Калинина. 1953. N 5. С. 24 – 31.
- [2] Асмолов Е.С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. N 6. С. 91 – 96.
- [3] Асмолов Е.С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. N 1. С. 66 – 73.
- [4] Бойко В.М., Папырин А.Н. О динамике образования газозвеси за ударной волной, скользящей вдоль поверхности сыпучей среды // ФГВ 1987. N 2. С.122 – 126.
- [5] Борисов А.А., Любимов А.В., Когарко С.М., Козенко В.П. О неустойчивости поверхности сыпучей среды при скольжении по ней ударных и детонационных волн // Физика горения и взрыва. 1967. N 1. С. 149 – 151.
- [6] Ван Бо-И, Осипцов А.Н. Пристеночный пограничный слой за ударной волной в запыленном газе // Изв. РАН, МЖГ. 1999. N 4. С. 61 – 73.
- [7] Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит. 2003. 192 с.
- [8] Вараксин А.Ю. Столкновения в потоках газа с частицами. М.: Физматлит. 2008. 310 с.

- [9] Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х. Определение поля концентрации частиц в задаче аспирации аэрозоля в движущемся воздухе // Изв. РАН. МЖГ. 2008. N 4. С. 71 – 81.
- [10] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в области пересечения ударных волн // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 2007. N 6. С. 86 – 100.
- [11] Гришин А.М., Забарин В.И. Двухфазный пограничный слой с несжимаемой несущей фазой на пластине при вдуве и отсосе газа с поверхности // ПМТФ. 1987. N 5. С. 54 – 61.
- [12] Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г, Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. С. 788 – 795.
- [13] Дородницын А.А. Пограничный слой в сжимаемом газе // Прикл. матем. и мех. 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449 – 486.
- [14] Егорова Л.А., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. Аэродинамическая фокусировка полидисперсных частиц при обтекании тел запыленным газом // Докл. РАН. 2004. Т. 395. N 6. С. 767 – 771.
- [15] Забарин В.И. Двухфазный пограничный слой на тонком клине // Вестник Кемеровского гос. ун-та. 2004. Вып.3. С. 32 – 35.
- [16] Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной “собственного” давления // ПММ АН СССР. 1979. Т. 43. N 3. С. 500 – 510.
- [17] Крайко А.Н., Сулайманова С.М. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с “пеленами” и “шнурами”, возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // ПММ АН СССР. 1983. Т. 47. N 4. С. 619 – 630.

- [18] Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1963. 263 с.
- [19] Наумов В.А. Расчет газодисперсного ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. N 6. С. 171 – 173.
- [20] Наумов В.А. Расчет неизотермического ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // ТВТ. 1990. Т. 28. N 4. С. 814 – 816.
- [21] Наумов В.А. Расчет газодисперсного ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом образующейся пленки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. N 2. С. 179 – 181.
- [22] Невский Ю.А., Осипцов А.Н. О роли нестационарных и наследственных сил в задачах гравитационной конвекции // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Мат., Мех. 2008. N 4 С. 37 – 40.
- [23] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [24] Осипцов А.Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластинке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. N4. С. 48 – 54.
- [25] Осипцов А.Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. N 3. С. 46 – 52.
- [26] Осипцов А.Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. N 5. С. 99 – 107.
- [27] Осипцов А.Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. N 6. С. 80 – 87.

- [28] Осипцов А.Н. Развитие лагранжева подхода для моделирования течений дисперсных сред. В сб.: Проблемы современной механики. К 85-летию со дня рождения академика Г.Г. Черного. М.: Изд. МГУ, 2008. С. 390 – 407.
- [29] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
- [30] Стулов В.П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. N 1. С. 51 – 60.
- [31] Терехов В.И., Пахомов М.А. Тепломассоперенос и гидродинамика в газокапельных потоках // Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2008. 284 с.
- [32] Циркунов Ю.М. Моделирование течений примеси в задачах двухфазной аэродинамики. Эффекты пограничного слоя // Моделирование в механике. Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО РАН. 1993. Т. 7. N 2. С. 151 – 193.
- [33] Циркунов Ю.М., Тарасова Н.В. О стратификации полидисперсной примеси в пограничном слое на нагретой поверхности вблизи критической точки // Моделирование в механике. Новосибирск: Изд-во ВЦ и ИТПМ СО АН СССР. 1990. Т. 4. N 2. С. 141 – 148.
- [34] Чернышенко С.И. О среднем расстоянии между частицами в запыленном газе при наличии особенностей “размазанной” плотности среды частиц // Вестн. МГУ. Сер. матем. и механ. 1984. N 1. С. 69 – 70.
- [35] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя М.:Наука, 1974. 742 с.
- [36] Akhatov I.S. et al. Aerosol flow in microscale: Theory, experiment, and application to direct-write microfabrication // Proc. ECI Intern. Conf. Heat Transfer and Fluid Flow in Microscale. Whistler, Canada, 2008.
- [37] Aoki H., Kurosaki Y., Anzai H. Study on the tubular pinch effect in a pipe flow // Bull. JSME. 1979. 22. 164. P. 206 – 212.

- [38] Asmolov E.S. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 381. P. 63 – 87.
- [39] Asmolov E.S., Osipov A.A. The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. N 12. 123301.
- [40] Bagnold R.A. *The physics of blown sand and desert dunes*. 1941. 265 c.
- [41] Bayliss L. E. The axial drift of the red cells when blood flows in a narrow tube // *J Physiol*. 1959. Vol. 149. No 3. P. 593 – 613.
- [42] Bhagat A.A.S., Kuntaegowdanahalli S.S., Papautsky I. Enhanced particle filtration in straight microchannels using shear-modulated inertial migration // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. N 10. 101702.
- [43] Bretherton F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. Iss. 2. P. 284 – 304.
- [44] Carlson D.J., Hoglund R.F. Particle drag and heat transfer in rocket nozzles // *AIAA Journal*. 1964. V. 2. N 11. P. 1980 – 1984.
- [45] Cherukat P., McLaughlin J.B. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 263. P. 1 – 18. Corrigendum: // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 285. P. 407 – 407.
- [46] Chiu H.H. *Boundary layer flow with suspended particles* // Report 620. Princeton Univ. 1962.
- [47] Dahneke B., Flachsbarth H. An aerosol beam spectrometer // *J. Aerosol Sci.* 1972. V. 35. P. 345 – 348.
- [48] Dandy D.S., Dwyer H.A. Sphere in shear flow at finite Reynolds number: Effect of shear on particle lift, drag and heat transfer // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 216. P. 381 – 410.

- [49] De La Mora J., Riesco-Chueca P. Aerodynamic focusing of particles in a carrier gas // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 195. P. 1 – 21.
- [50] Duck P.W., Hewitt R.E., Foster M.R. On the spatial development of a dusty wall jet // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 514. P. 385 – 410.
- [51] Foster M.R., Duck P.W., Hewitt R.E. Boundary layers in a dilute particle suspension // *Proc. R. Soc. A.* 2006. V. 462. P. 136 – 168.
- [52] Gerrard J.H. An experimental investigation of initial stages of the dispersion of dust by shock waves // *Brit. J. Appl. Phys.* 1963. V. 14. N 4. P.186 – 192.
- [53] Glauert M.B. The wall jet. // *J. of Fluid Mech.* 1956. 1, 625, P. 625 – 643.
- [54] Hall D. Measurements of the mean force on a particle near a boundary in turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 187. P. 451 – 466.
- [55] Hamed A., Tabakoff W. The boundary layer of particulate gas flow // *Zeitschrift fur Flugwissenschaften.* 1972. N 20. P. 373 – 380.
- [56] Han M., Kim C., Kim M., Lee S. Particle migration in tube flow of suspensions // *J. Rheol.* 1999. 43. P. 1157 – 1174.
- [57] Healy D.P., Young J.B. Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows // *Proc. Roy. Soc. A.* 2005. V. 461. N 2059. P. 2197 – 2225.
- [58] Hishida M., Hayashi K. Numerical simulation of a shock wave propagation in the solid particle layer // In NAL, Proceedings of the 7th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics. 1989. P. 87 – 91.
- [59] Ho B.P., Leal L.G. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. N 2. P. 365 – 400.

- [60] Hussainov M., Kartushinsky A., Mulgi A., Shcheglov I., Tisler S. Properties of solid particle distribution in two-phase laminar boundary layers of various shapes and particle sedimentation // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 1994. V. 42. N. 4. P. 237 – 249.
- [61] Ijzermans R.H.A., Meneguz E. Reeks M.W. Segregation of particles in incompressible random flows: singularities, intermittency and random uncorrelated motion // Journal of Fluid Mechanics. 2010. V. 653. P. 99 – 136.
- [62] Israel G.W., Friedlander S.K. High-speed beams of small particles // J. Colloid Interface Sci. 1967. V. 24. P. 330 – 337.
- [63] Jain A., Chosh A. Gas-particulate laminar boundary layer on a flat plate // Z. Flugwiss Weltraumersch. 1979. N 3. P. 379 – 385.
- [64] Jeffrey R. C., Pearson J. R. A. Particle motion in laminar vertical tube flow // J. Fluid Mech. 1965. 22. P. 721 – 735.
- [65] Karnis A., Goldsmith H. L., Mason S. G. The flow of suspensions through tubes. V Inertial effects // Can. J. Chem. Engng. 1966. 44 P. 181 – 193.
- [66] Kendall M.A.F. The delivery of particulate vaccines and drugs to human skin with a practical hand-held shock tube-based system // Shock Waves. 2002. V. 14. N 1. P. 22 – 30.
- [67] Kuntaegowdanahalli S.S, Bhagat A.A.S., Kumarb G., Papautsky I. Inertial microfluidics for continuous particle separation in spiral microchannels // Lab on a Chip. 2009. V. 20. Iss. 9. P. 2973 – 2980.
- [68] Lee S.L. Aspects of suspension shear flows // Adv. in Appl. Mech. 1982. V. 22. P. 1 – 65.
- [69] Lee S.L., Chan W.K. Two-phase laminar boundary layer along a vertical flat wall // Hydrotransport. 1972. N 2 (A-4,45-A4). P. 58.

- [70] Leighton D., Acrivos A. The lift on a small sphere touching a plane in the presence of a simple shear flow // *Z. Angew. Math. Phys.* 1985. V. 36. N 1. P. 174 – 178.
- [71] Liu J.T.C. Flow induced by an oscillating infinite flat plate in a dusty gas // *Phys. Fluids*. 1966. V. 9. N 9. P. 1716 – 1720.
- [72] Liu J.T.C. Flow induced by the impulse motion of an infinite flat plate in dusty gas // *Astronautica Acta*. 1967. V. 4. N 13. P. 369 – 377.
- [73] Liu P. et al., Generating particle beams of controlled dimensions and divergence // *Aerosol Science and Technology*. 1995. V. 22. Pt. I. P. 293. Pt. II. P. 314 – 324.
- [74] Lovaletti P.M., Brady J.F. The force on a bubble, drop, or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // *Phys. Fluids*. 1993. V. 5. P. 2104 – 2116.
- [75] Marble F.E. Dynamics of dusty gases // *Ann. Rev. Fluid Mech.* Palo Alto, Calif.: *Annu. Rev. Inc.* 1970. V.2. P. 397 – 446. (Рус. перев.: Марбл Ф. Динамика запыленных газов // *Механика: Период. сб. перев. иностр. статей*. 1971. N6. С. 48 – 89.)
- [76] Matas J.-P., Morris J.F., Guazzelli E. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 2004. 515. P. 171 – 195.
- [77] Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. of Fluids*. 1983. V.26. P. 883 – 889.
- [78] McLaughlin J.B. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 224. P. 261 – 274.
- [79] McLaughlin J.B. The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 246. P. 249 – 265.

- [80] Mei R. An approximate expression for the shear lift force at finite Reynolds number // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. N 1. P. 145 – 147.
- [81] Merzkirch W., Bracht K. The erosion of dust by a shock wave in air: initial stages with laminar flow // Int. J. Multi-phase Flow. 1978. V. 4. N 1. P. 89–95.
- [82] Mollinger A.M., Nieuwstadt F.T.M. Measurement of the lift force on a particle fixed to the wall in the viscous sublayer of a fully developed turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 285 – 306.
- [83] Murphy W.K., Sears G.W. Production of particulate beams // J. Appl. Phys. 1964. V. 35. P. 1986 – 1987.
- [84] Oliver R. Influence of particle rotation on radial migration in the Poiseuille flow of suspensions // Nature. 1962. 194. P. 1269 – 1271.
- [85] Osipov A.N. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. N 6. P. 357 – 370.
- [86] Osipov A.N. Modified Lagrangian method for calculating the concentration in dusty-gas flow with intersecting particle trajectories // 3^d Intern. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98. Lyon, France. 1998. Paper 236. P. 1 – 8.
- [87] Osipov A.N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274. P. 377 – 386.
- [88] Osipov A.N., Veselyi S.L., Kulikovskii V.A., Wang B.Y. The flow structure of dilute gas-particle suspensions behind a shock wave moving along a flat surface // Appl. Math. Mech. 1991. V. 12. N 6. P. 531 – 538.
- [89] Otterman B., Lee S.L. Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of a suspension over a flat plate // In: Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst Monterey, Calif: Stanford Univ. Press. 1970. P 311 – 322.

- [90] Papyrin A.N. et al. Cold spray technology. UK.: Elsevier, 2007. 336 p.
- [91] Poiseuille J.L.M. Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires // Ann. Sci. Nat. 1836. Ser.2. T.5. P.111 – 115.
- [92] Prabha S., Jain A.C. Laminar boundary layer of gas-particulate flow on a flat plate // Proc. Indian Acad. Sci. 1979. 88-A. P. 379 – 385.
- [93] Prabha S., Jain A.C. Use of compatibility conditions in the solution of gas-particulate boundary layer equations // Appl. Sci. Res. 1980. N 36. P. 81 – 91.
- [94] Quinlan N.J., Kendall M.A.F., Bellhouse B.J., Ainsworth R.W. Investigations of gas and particle dynamics in first generation needle-free drug delivery devices // Shock Waves. V. 10. N 6. 2001. P. 395 – 404.
- [95] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from drops // Chem. Eng. Prog. 1952. V. 48. Pt. 1. P. 141 – 146; Pt. 2. P. 173 – 180.
- [96] Rubinow S. I., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. P. 447 – 459.
- [97] Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow. // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385 – 400. Corrigendum: // J. Fluid Mech. 1968. V. 31 P. 624.
- [98] Schonberg J. A., Hinch E. J. Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1989. 203. P. 517 – 524.
- [99] Segre G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Pt. 2. Experimental results and interpretation // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. P. 136 – 157.
- [100] Singleton R.E. Compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate // ZAMP. 1965. V. 9. N 16. P. 421 – 449.

- [101] Soo S. L. Fluid dynamics of multiphase systems. Waltham: Blaisdell, 1967.
- [102] Suzuki T., Sakamura Y., Igra O., Adachi T., Kobayashi S., Kotani A. and Funawatashi Y. Shock tube study of particles' motion behind a planar shock wave // Meas. Sci. Technol. 2005. V. 16. N 12. P. 2431 – 2436.
- [103] Tachibana M. On the behaviour of a sphere in the laminar tube flows // Rheol. Acta. 1973. 12. P. 58 – 69.
- [104] Taylor M. The flow of blood in narrow tubes. II. The axial stream and its formation, as determined by changes in optical density // Aust. J. Exp. Biol. Med. Sci. 1955. V. 33. Iss. 1. P.1 – 16.
- [105] Temkin S. Gasdynamic agglomeration of aerosols. I. Acoustic waves // Phys. Fluids. 1994. V. 6. Is. 7. P. 2294 – 2303.
- [106] Tsirkunov Yu. M., Volkov A.N., Tarasova N. V. Full Lagrangian approach to the calculation of dilute dispersed phase flows: advantages and applications // ASME 2002 Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Quebec, Canada, July 14 – 18, 2002. CD-ROM Proc. ASME FEDSM'02. N 31224.
- [107] Wang B.Y., Xiong Y., Qi L.X. Shock-induced near-wall two-phase flow structure over a micron-sized particles bed // Shock Waves. 2006. V. 15. N 5. P. 353 – 373.
- [108] Zaripov S.K., Vanyunina M.V., Skvortsov E.V., Osiptsov A.N. Calculation of concentration of aerosol particles around a slot sampler // Atmospheric Environment. 2007. V. 41. N 23. P.4773 – 4780.

Работы автора

- [109] Осипцов А.Н., Попушина Е.С., Рыбдылова О.Д. Моделирование струйных течений запыленного газа // Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Л75 16 – 25 апреля 2007 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2007. С. 132 – 133.
- [110] Осипцов А.Н., Попушина Е.С., Рыбдылова О.Д. Плоская ламинарная струя // Современные проблемы механики сплошной среды, МИАН, Москва, 12–14 ноября 2007, тезисы докладов, С. 135.
- [111] Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Фокусировка аэрозоля за ударной волной в узком канале // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 16 – 25 апреля 2010. Москва. 2010. С. 146.
- [112] Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 433. N 3. С. 346 – 349.
- [113] Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Фокусировка частиц аэрозоля в канале постоянного сечения с помощью ударных волн // Современные проблемы аэрогидродинамики. Тезисы докладов XVI школы-семинара под рук. акад. РАН Г.Г. Черного. 6 – 16 сентября 2010 г. Сочи, “Буревестник” МГУ. 2010. С. 88.
- [114] Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Фокусировка аэрозоля за ударной волной, движущейся в микроканале // Теор. основы хим. технологии. Т. 45. N 2. 2011, С. 178 – 186.
- [115] Попушина Е.С., Рыбдылова О.Д. Свободная и пристенная двухфазные струи // Труды конференции-конкурса молодых ученых 11 – 16 октября 2006 г. 2007. С. 246 – 254.

- [116] Рыбдылова О.Д. Поперечная миграция частиц в пограничном слое на плоской пластине // Наука и образование: эл. научно-техн. изд. 2012. N 2. 77-30569/318597.
- [117] Рыбдылова О.Д. Эффект фокусировки инерционных частиц за ударной волной, движущейся в узком канале // Труды конф.-конкурса молодых ученых 14 – 16 октября 2009 г. 2010. С. 277 – 284.
- [118] Рыбдылова О.Д. Подъем пыли за ударной волной // Труды конф.-конкурса молодых ученых 13 – 15 октября 2010 г. 2011. С. 289 – 293.
- [119] Рыбдылова О.Д., Голубкина И.В. Аэродинамическая фокусировка частиц в потоках с ударными волнами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. N 4, часть 3, 2011, С. 1074 – 1076.
- [120] Рыбдылова О.Д., Голубкина И.В. Аэродинамическая фокусировка частиц в потоках с ударными волнами // Современные методы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов (Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 г.) Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011. С. 144 (ISBN 978–5–91326–180–9).
- [121] Рыбдылова О.Д., Осипцов А.Н. Течение запыленного газа за ударной волной в узком канале // Сб. “Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского”. Казань. 2009. Том 39. С. 315 – 317.
- [122] Рыбдылова О.Д., Осипцов А.Н. Аэродинамическая схема фокусировки частиц аэрозоля с помощью ударных волн в узких каналах // Модели и методы аэродинамики. Материалы Десятой Международной школы-семинара. 2010. С.151.

- [123] Osiptsov A., Rybdylova O. A novel method of aerosol focusing by a shock wave in a narrow channel // Abstract book Int. Aerosol Conf. Aug. 29 – Sept. 3. 2010 Helsinki. CD. P.1.
- [124] Rybdylova O., Osiptsov A. Particle focusing effect behind a moving shock wave in a narrow channel // Book of abstracts 4th Intern. Topical Team Workshop on Two-Phase systems for ground and space applications. Novosibirsk, Russia, 2009. P. 65.
- [125] Rybdylova O.D., Osiptsov A.N. Effect of aerosol-particle focusing behind a shock wave in a microchannel // Proceedings of the 7th Int. Conf. on Heat and Mass Transfer Fluid Mech. and Thermodyn. (HEFAT 2010) CD. 2010. P.2221 – 2226.