

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 532.529.5

Голубкина Ирина Валерьевна

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗЕ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. А.Н. Осипцов

Научный консультант:

к.ф.-м.н. В.И. Сахаров

Москва – 2010

Оглавление

Введение	4
1 Обзор литературы	11
2 Модель запыленного газа	25
2.1 Основные уравнения модели запыленного газа	25
2.2 Полный лагранжев метод	31
3 Возникновение волн с полной дисперсией при взаимодействии скачков уплотнения в запыленном газе	36
3.1 Равновесная модель гетерогенного потока и ее использование для классификации режимов взаимодействия	36
3.2 Исследование локальной структуры течения запыленного газа в области взаимодействия волн в рамках двухскоростной модели	44
4 Взаимодействие ударных волн в газе с грубодисперсной примесью. Эффект аэродинамической фокусировки частиц.	52
4.1 Расчет параметров несущей фазы	52
4.2 Расчет параметров дисперсной фазы с применением полного лагранжева подхода	58
4.3 Параметрическое исследование эффекта фокусировки частиц .	65
5 Взаимодействие косога скачка уплотнения с головной ударной волной при обтекании цилиндра сверхзвуковым запыленным потоком	75
5.1 Моделирование течения несущей и дисперсной фазы	77
5.2 Распределение динамических параметров фаз в ударном слое .	81
5.3 Анализ увеличения тепловых потоков, обусловленного наличием дисперсных частиц в набегающем потоке	87
Заключение	94

Приложение

97

Литература

103

Введение

Актуальность исследования течений дисперсных сред при наличии сильных разрывов (ударных волн, контактных разрывов и их комбинаций) обусловлена многочисленными приложениями в аэродинамике (движение сверхзвуковых летательных аппаратов в газопылевых и аэрозольных облаках, течения топливных смесей в соплах ракетных двигателей, распространение взрывных и детонационных волн в загрязненной атмосфере), промышленных технологиях (производство порошковых материалов, нанесение покрытий), медицине (безыгольное введение подкожных инъекций), нефте- и угледобывающей промышленности (технология гидроразрыва, распространение ударных волн при взрывах в угольных шахтах) и др. Наличие дисперсной примеси может существенно изменить структуру газодинамических разрывов и общие свойства течения, что может вызывать как негативные последствия (например, разрушение обшивки летательных аппаратов и стенок сверхзвуковых каналов при механическом и тепловом воздействии твердых частиц на поверхность; снижение эффективности газотурбинных установок), так и быть источником эффектов, полезных с точки зрения технических приложений (например, формирование коллимированных пучков микрочастиц, используемых для резки материалов или введения подкожных инъекций).

Несмотря на большое количество публикаций, посвященных различным аспектам течений с ударными волнами в многофазных средах, ряд важных проблем остаются незатронутыми либо изученными недостаточно подробно. Одной из таких проблем является возникновение так называемых волн с полной дисперсией, т. е. локализованных в пространстве волн сжатия, в которых

поля параметров фаз не испытывают разрыва. В то время как структура одиночной волны с полной дисперсией достаточно хорошо изучена в литературе, более сложные схемы течения при наличии таких волн практически не исследовались. В данной работе рассматривается взаимодействие плоских волн сжатия в стационарном потоке газозвеси и определяются условия, при которых все либо только некоторые из проходящих или исходящих волн вырождаются в волны с полной дисперсией.

Вторым направлением работы является исследование эффектов фокусировки инерционных частиц, проявляющихся при взаимодействии ударных волн в запыленном газе. Газодинамические разрывы делят поле течения на области с резко различающимися свойствами несущей фазы. Поскольку частицы дисперсной примеси в запыленном газе обычно достаточно инерционные и их параметры не могут изменяться так же быстро, как параметры несущего газа, то в потоке могут возникать зоны, где рассогласование скоростей фаз довольно велико. Кроме того, возможно появление областей, в которых траектории частиц пересекаются, образуя многослойные структуры, известные в литературе как «складки», «пелены» и «шнуры» [17], [18], [27]. При моделировании высокоскоростных аэродисперсных течений необходимо учитывать все упомянутые эффекты и применять адекватные численные методы, позволяющие корректно рассчитать поля скоростей и концентрации частиц.

В большинстве работ, посвященных течениям многофазных сред с ударными волнами, отсутствует аккуратный расчет поля концентрации частиц. Обычно применяются стандартные подходы, не учитывающие возможность пересечения траекторий частиц (эйлеров подход, метод трубок тока). Применение этих методов обосновано в случаях, когда частицы малоинерционные и отклонение их траекторий от линий тока несущей фазы невелико. Однако в случае достаточно инерционных частиц, использование стандартных подходов может приводить к некорректным результатам при расчете течения дисперсной фазы [109].

В данной диссертации для расчетов параметров дисперсной фазы используется полный лагранжев подход [26, 97], который основан на решении уравнения неразрывности дисперсной фазы в лагранжевых переменных и привлечении дополнительных уравнений для компонентов якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. Указанный метод позволяет рассчитывать с контролируемой точностью структуру областей пересекающихся траекторий и зон накопления частиц.

В работе полный лагранжев подход используется для исследования эффекта фокусировки частиц, возникающей за точкой взаимодействия ударных волн в стационарном запыленном потоке. Для создания коллимированных пучков частиц обычно используются специально организованные струйные течения со сходящимися линиями тока несущей фазы, а также так называемые «аэродинамические линзы» – каналы с резко переменным сечением, которые позволяют собирать инерционные дисперсные частицы в узкий направленный пучок. Схема аэродинамической фокусировки частиц при взаимодействии ударных волн, рассматриваемая в диссертации, является новой, отличной от известных в литературе. В работе проводится детальное параметрическое исследование характера фокусировки частиц при различных режимах взаимодействия волн.

Локальные области накопления частиц могут возникать и в течениях с более сложной конфигурацией взаимодействующих ударных волн. Одним из таких течений, представляющих самостоятельный интерес, является обтекание затупленного тела гиперзвуковым потоком запыленного газа при наличии косо скачка уплотнения, падающего на головную ударную волну. Эта проблема актуальна в связи с изучением высокоскоростного движения летательных аппаратов в газопылевых облаках, при котором указанное взаимодействие может иметь место на краях воздухозаборников и других выступающих частей конструкций. Поскольку при таких конфигурациях течения даже в чистом газе интенсивность тепловых потоков в локальных точках поверхности может достигать аномально высоких значений, то актуален вопрос, в какой

степени присутствие твердых частиц в набегающем потоке может дополнительно способствовать интенсификации теплообмена и возрастанию тепловых потоков к обтекаемой поверхности. В работе рассматривается сверхзвуковое обтекание плоского цилиндра слабозапыленным потоком газа при наличии косоугольного скачка, приходящего на головную ударную волну. Проводится исследование влияния приходящего скачка уплотнения на изменение характера движения частиц и распределение тепловых потоков со стороны дисперсной фазы по сравнению со случаем симметричного обтекания цилиндра сверхзвуковым запыленным потоком.

Основные цели работы:

- определение условий возникновения волн с полной дисперсией при взаимодействии плоских скачков уплотнения в стационарном потоке запыленного газа;
- численное исследование структуры областей неравновесного течения при взаимодействии плоских ударных волн и волн с полной дисперсией;
- численное исследование сверхзвуковых течений дисперсной фазы с локальными зонами накопления частиц и наличием пересекающихся траекторий дисперсной фазы на основе применения полного лагранжева подхода;
- параметрическое исследование эффекта аэродинамической фокусировки инерционных частиц в области взаимодействия плоских ударных волн в стационарном запыленном потоке;
- изучение влияния твердой фазы на распределение тепловых потоков вдоль поверхности плоского цилиндра, обтекаемого сверхзвуковым потоком запыленного газа при наличии падающего косоугольного скачка, взаимодействующего с головной ударной волной.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертации, обусловлена использованием строгих математических моделей течения гетерогенных сред. В численных алгоритмах применялись хорошо известные и апробированные методы. Численные процедуры были тщательно проверены на различных тестовых задачах, что гарантирует их корректность и оптимальность. Точность расчетов подтверждается сравнением результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

- Проведено исследование взаимодействия плоских ударных волн в стационарном запыленном потоке и определены параметры, при которых входящие и/или исходящие волны вырождаются в волны с полной дисперсией.
- В рамках двухскоростной модели запыленного газа проведено численное исследование структуры течения в области взаимодействия ударных волн и волн с полной дисперсией.
- С применением полного лагранжева подхода исследовано движение и поле концентрации частиц в течениях несущей фазы, содержащих системы газодинамических разрывов.
- Обнаружен и детально исследован эффект аэродинамической фокусировки частиц, возникающей за точкой взаимодействия плоских скачков уплотнения в потоке грубодисперсной газозвеси. Определены параметры частиц и набегающего потока, при которых реализуется оптимальная фокусировка частиц.
- Проведен анализ увеличения локальных тепловых потоков, обусловленного фокусировкой дисперсных частиц в ударном слое около плоского цилиндра при взаимодействии косого скачка уплотнения с головной ударной волной.

Научная значимость.

- Исследованы волны с полной дисперсией в потоке запыленного газа и их взаимодействие между собой и с ударными волнами. Установлено, что при определенных условиях любые из четырех взаимодействующих волн сжатия могут вырождаться в волны с полной дисперсией. Найдены условия существования всех возможных конфигураций.
- С использованием полного лагранжева подхода исследованы различные типы течения запыленного газа с грубодисперсной примесью и открыты новые эффекты, возникающие в таких течениях.
- Разработаны численные методы расчета параметров дисперсной фазы в известном поле несущей фазы, которое может быть задано как аналитически, так и в виде множества значений на нерегулярной сетке.

Практическая значимость. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для развития технологий фокусировки и сепарации частиц в дисперсных потоках, при проектировании тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов. Кроме того, полученные результаты могут объяснить феномены исчезновения разрывов и возникновения размытых структур (волн с полной дисперсией) в неоднородных течениях запыленного газа с взаимодействующими ударными волнами.

Созданный в процессе работы над диссертацией комплекс компьютерных программ может быть использован для расчетов полей скорости, температуры и концентрации дисперсных частиц в поле несущей фазы, содержащем сильные разрывы и другие особенности.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Конференции-конкурсе молодых ученых Института механики МГУ (2005, 2006, 2009, 2010); Конференции МГУ «Ломоносовские чтения» (2007, 2009, 2010); VIII молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2009); XV и XVI

школе-семинаре «Современные проблемы гидроаэродинамики» (Сочи, 2007, 2010); IX и X международной школе-семинаре «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2009, 2010); XVII школе-семинаре молодых ученых и специалистов «Проблемы газодинамики и тепломассообмена» (Жуковский, 2009); Всероссийской конференции «Механика и химическая физика сплошных сред» (Бирск, 2007); Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100-летию акад. Л.И. Седова (Москва, 2007); XIX Международном симпозиуме по процессам переноса ISTP-19 (Рейкьявик, 2008).

За стендовый доклад «Фокусировка инерционных частиц за точкой пересечения скачков уплотнения», представленный на конференции «Механика и химическая физика сплошных сред» (Бирск, 2007), автор удостоен диплома I степени. За работу «Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в зонах взаимодействия ударных волн», вошедшую в состав диссертации, автор удостоен диплома 3-й степени по результатам Конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ в 2006 году.

Результаты работы обсуждались также на специализированных научных семинарах: семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2006–2009), семинаре по механике многофазных сред под руководством д.ф.м.н. А.Н. Осипцова (НИИ механики МГУ, Москва, 2004–2010), семинаре под руководством акад. А.Г. Куликовского, проф. А.А. Бармина, проф. В.П. Карликова (НИИ механики МГУ, Москва, 2010).

Глава 1. Обзор литературы

Одиночные ударные волны в аэродисперсных потоках

Исследования течений с разрывами в механике многофазных сред имеют уже довольно продолжительную историю. Первые фундаментальные работы, посвященные исследованию стационарной прямой ударной волны, датируются серединой прошлого столетия. Пионерскими являются работы Carrier G.F. 1958 г. [50], Rudinger G. [104] и Kriebel A.R. [85] 1964 г. В указанных работах было установлено, что структура ударной волны в запыленном газе может быть достаточно точно описана моделью, включающей фронт волны бесконечно малой ширины (который частицы, в силу своей инерционности, проходят без изменения) и протяженную зону за скачком, в которой происходит процесс выравнивания параметров фаз, в результате чего наступает новое состояние равновесия. Частицы не влияют на структуру фронта волны в силу того, что суммарной площадью сечения частиц, пронизывающих фронт ударной волны в каждый момент времени, как правило, можно пренебречь. Параметры газа перед и сразу за фронтом связаны соотношениями Рэнкина-Гюгонио для чистого газа. В работах [50, 85, 104] были также определены параметры частиц, от которых зависит интенсивность волны и характер зоны релаксации: диаметр частиц, плотность и теплоемкость вещества частиц, массовая концентрация частиц. Безразмерными аналогами перечисленных параметров являются: характерное число Рейнольдса обтекания частиц, параметр инерционности частиц, отношение теплоемкостей вещества фаз, относительная массовая концентрация частиц.

Более подробное параметрическое исследование прямой ударной волны в газовзвесах представлено в работах Ven-Dor G., Igra O. [44, 77]. Были исследованы зависимости ширины зоны релаксации и глобальных параметров волны

от характеристик дисперсной фазы, таких как массовая концентрация, теплоемкость и плотность вещества частиц. Были установлены следующие закономерности: во-первых, с увеличением массовой концентрации частиц интенсивность ударной волны возрастает, а ширина зоны релаксации сокращается; во-вторых, чем выше инерционность частиц, тем медленнее происходит процесс выравнивания параметров фаз, т.е. зона релаксации увеличивается; в-третьих, большее значение теплоемкости частиц соответствует более протяженной зоне температурной релаксации. В [88] аналогично исследовано влияние свойств дисперсной фазы на структуру косой ударной волны в потоке запыленного газа.

Авторам Ven-Dor G., Igra O. принадлежат также фундаментальные обзоры [45] и [78], в которых собраны и обобщены результаты подробных исследований одиночной (как прямой, так и наклонной) ударной волны в запыленном газе для широкого диапазона свойств несущей и дисперсной фаз и при различных условиях течения. Обзоры более ранних отечественных работ по течениям запыленного газа с ударными и детонационными волнами представлены авторами Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Кутушев А.Г. и др. в [16, 19].

Ряд работ отечественных и зарубежных авторов [43, 63, 96, 108] касается исследования нестационарного движения ударной волны по газозвеси. Установлено, что частицы способствуют достаточно быстрому затуханию ударной волны, причем скорость затухания возрастает по мере увеличения массовой концентрации частиц и падает с увеличением размера частиц. Интересный качественный результат был получен в работах [21, 23] – за затухающей ударной волной (в частности, в задаче о сильном взрыве в запыленном газе) обнаружено формирование узкого слоя повышенной концентрации частиц, поверхность которого параллельна фронту волны, таким образом, ударная волна как бы «сгребает» частицы.

Характер движения частиц за ударной волной с учетом конечности объемной концентрации дисперсной фазы исследовался в работах [67, 110].

В работах [22, 104] для исследования характеристик двухфазного потока в областях, где рассогласованием скоростей и температур фаз можно пренебречь, была введена модель так называемого «эффективного газа» – гипотетической среды, рассматриваемой как совершенный газ с плотностью, равной сумме плотностей фаз, и осредненными по массе теплоемкостями.

Наряду с обычными ударными волнами, которые в механике гетерогенных систем иногда называются волнами с частичной дисперсией, в литературе рассматривались и так называемые волны с полной дисперсией – структуры, в которых газодинамический разрыв отсутствует, а сами волны представляют собой область непрерывного изменения параметров фаз. Впервые возможность существования волн с полной дисперсией в запыленном газе была отмечена в работе [104], хотя аналогичные типы волн в чистом газе при наличии молекулярных релаксационных процессов исследовались и в более ранних работах [68]. G. Rudinger показал, что волны с полной дисперсией в запыленном газе возможны, поскольку «замороженное» число Маха (по чистому газу) всегда меньше «равновесного» числа Маха (посчитанного для гетерогенной смеси в целом); поэтому, когда ударная волна существует в «эффективном газе», разрыв в поле параметров чистого газа может отсутствовать. Было доказано также [22, 104], что для волн как с полной, так и частичной дисперсией параметры фаз в зонах равновесного течения перед и за волной связаны соотношениями Рэнкина-Гюгонио для «эффективного газа».

В статье [60] рассматривались волны с полной дисперсией, возникающие в бинарной смеси газов, молекулярная масса которых различается в несколько раз. Для некоторых приложений можно проводить аналогию между такими смесями газов и гетерогенными средами и рассматривать молекулы «тяжелого» газа как частицы дисперсной фазы. Прямые волны с полной и частичной дисперсией в парожидкостных системах, в том числе при наличии фазовых переходов, рассматривались в работах [69, 121]. Результаты теоретических исследований этих и других авторов обобщены в [115], где подробно разобраны различные типы волн сжатия в аэродисперсных средах с жидкими или твер-

дыми частицами.

В работах [71, 72] при теоретическом исследовании волн с полной дисперсией в запыленном газе было показано, что в случае очень слабых волн для расчета структуры волны необходимо учитывать влияние вязкости и теплопроводности.

Экспериментальных работ, тема которых – движение ударных волн по запыленному газу, в литературе немного, поскольку существует несколько факторов, значительно затрудняющих подобные эксперименты. Отметим только два из них. Во-первых, это проблема создания равномерного распределения дисперсных частиц в начальный момент движения газозвеси. Вторая техническая проблема – это эрозия поверхностей стенок сопел и каналов в результате попадания на них твердых частиц, движущихся с высокой скоростью. Для решения первой проблемы применяются специальные приемы, один из которых, основанный на принципе механических вибраций, описан в [63], тогда как вторую проблему можно устранить только частично, применяя более прочные материалы при конструировании экспериментальных установок.

Среди имеющихся экспериментальных работ стоит особо отметить работу 1976 г. авторов Quta E., Tajima K., Morii H. [103], где представлены результаты опытов, проведенных для сверхзвуковых течений смеси газа с твердыми частицами в ударной трубе. Показано, что по мере затухания ударной волны, движущейся в канале, при числах Маха, близких к единице, резкий скачок давления исчезает, а параметры газа меняются непрерывно. Таким образом, возможность возникновения волн с полной дисперсией в запыленном газе была подтверждена экспериментально.

Системы ударных волн в запыленном газе

В работе Miura H., Glass I.I. [91] рассмотрена одномерная задача о распаде произвольного разрыва, когда в начальный момент частицы дисперсной фазы присутствуют только в камере с низким давлением. Был выявлен эффект

затухания ударной волны, движущейся по газовзвеси, а также проведено исследование зависимости числа Маха волны от начального отношения давлений. Этими же авторами была исследована одномерная задача об отражении прямой ударной волны от стенки [93] и двумерное стационарное обтекание клина сверхзвуковым потоком запыленного газа [92]. В обеих работах для исследования глобальных свойств потока использовалась модель «эффективного газа», а неравновесное течение рассчитывалось численно. В работе [93] было показано, что при одномерном отражении волны в запыленном газе возможны три случая: падающая и отраженная волны являются волнами с частичной дисперсией; падающая волна – с частичной, а отраженная – с полной дисперсией; все волны являются волнами с полной дисперсией. Были найдены критерии существования всех указанных режимов. В [92] исследовалось течение в окрестности присоединенного скачка уплотнения при обтекании клина запыленным потоком. Авторами установлено, что при небольших углах раствора клина косой скачок уплотнения может вырождаться в волну с полной дисперсией, и определены параметры, соответствующие переходу от непрерывной формы волны сжатия к течению со скачком. Установлено, что ударная волна примыкает к клину под тем же углом, что и в чистом газе, однако дальше она изгибается по направлению к клину. С применением численного моделирования решены континуальные уравнения для газа и частиц и построены распределения параметров фаз для случаев, когда для частиц используются различные граничные условия на твердой поверхности (полного прилипания или абсолютно упругого отражения).

Нестационарная задача о падении прямой ударной волны на клин была численно исследована в статье [46], где авторами использовалось эйлерово описание гетерогенной смеси и предполагалось, что в области перед клином поток однофазный. Рассматривались регулярное и различные режимы маховского отражения ударной волны от клина. В результате параметрического исследования была выявлена зависимость характера течения от массовой концентрации и диаметра частиц. Было установлено, что наличие частиц суще-

ственно влияет как на тип отражения, так и на характер скачков уплотнения, причем уменьшение диаметра частиц приводит к увеличению интенсивности скачков. Было также установлено, что критический угол перехода между регулярным и маховским режимами уменьшается с ростом массовой концентрации частиц. Похожая задача исследовалась численно в работах Saito T., Marumoto M., Takayama K. [107] и Igra O., Hu G. *et al.* [79], однако предполагалось, что частицами заполнено все пространство. В [79] было установлено, что давление на поверхности клина в запыленном газе существенно выше, чем в чистом. Также, авторами было отмечено, что при определенной массовой доле частиц все ударные волны за исключением маховской «ножки» могут вырождаться в размытые непрерывные структуры. В [107] показано, что в процессе движения нестационарной ударной волны вдоль поверхности клина тип отражения может эволюционировать от регулярного к маховскому.

В работе А.В. Федорова и соавторов [58] рассматривалась задача об отражении плоской косоугольной ударной волны от стенки в стационарном потоке запыленного газа. В рамках модели «эффективного газа» был определен критерий перехода от регулярного к маховскому режиму для различных значений объемной доли включений. Отражение волны от стенки было также рассчитано численно в рамках двухскоростной модели запыленного газа. Результаты аналитического и численного решения совпадают с хорошей точностью лишь до некоторых значений числа Маха падающей волны и для частиц небольшого диаметра, поскольку в случае сильных ударных волн и крупных частиц зоны неравновесного течения становятся довольно протяженными и существенно влияют на тип отражения волны.

Интересные результаты получены авторами Киселев В.П., Киселев С.П. и др. при численном моделировании взаимодействия ударной волны с облаком частиц конечных размеров [47, 83]. Показано, что в результате указанного взаимодействия в поле несущей фазы формируются сложные вихревые структуры и множественные пересечения скачков уплотнения, а частицы концентрируются в узких сильно искривленных областях.

Существенной особенностью всех приведенных выше работ, касающихся анализа течений с системами ударных волн, является эйлеров подход к исследованию как газовой, так и дисперсной фазы. Этот подход не учитывает возможности пересечения траекторий частиц и проявления эффектов аэродинамической фокусировки частиц в узких зонах, что в некоторой степени снижает значение полученных авторами результатов.

Аэродинамическая фокусировка частиц

Первые публикации, посвященные эффекту фокусировки инерционных частиц в специально организованных газовых потоках, относятся к 60-м годам прошлого века. Экспериментальная возможность аэродинамической фокусировки микрочастиц в узкий пучок продемонстрирована в работах W.K. Murphy, G.W. Sears [95] и G.W. Israel, S.K. Fridlender [81]. Эффект аэродинамической фокусировки инерционных частиц может быть использован для сепарации и разделения аэрозолей на фракции [53], а также для создания кумулятивных «струй» нано- и микрочастиц с высокими локальными значениями кинетической энергии дисперсной фазы [62,86,87,100,111,117,118,122,123]. Управление дисперсными потоками имеет важное значение в технологиях резки материалов, «холодного» напыления, обработки поверхностей, в последние годы коллимированные пучки частиц все более широкое применение получают в высокоточных технологиях: производстве микросхем и сенсорных элементов, нанесении микротекстур, синтезировании нанокристаллических материалов. Известны примеры использования эффекта фокусировки частиц и в более специфических приложениях. Так, например, в работах M.A.F. Kendall *et al.* [82, 102] предлагается устройство для формирования высокоскоростного пучка микрочастиц порошкового лекарственного препарата для безыгольного подкожного введения инъекций.

В большинстве случаев для фокусировки микрочастиц используются течения со сходящимися линиями тока несущей фазы, причем в силу скоростного

отставания частиц теоретически возможно организовать такой поток, в котором частицы из конечного объема фокусируются в фиксированную точку пространства J. Fernandez de la Mora, P. Riesco-Chueca [59]. В дозвуковых потоках аэрозольные пучки обычно создаются с помощью так называемых «аэродинамических линз», т.е. одиночных или периодически расположенных областей сужения и расширения потока. Так, в работах P. Liu *et al.* [86, 87] и X. Zhang *et al.* [122, 123] «аэродинамические линзы» представляют собой каналы с последовательностью параллельных пластин с круглыми коаксиальными отверстиями. В [90] для фокусировки частиц предложено использовать ряд узких щелей, расположенных перпендикулярно друг к другу, объясняя преимущество данной модели возможностью применения ее для более широкого диапазона параметров частиц.

Во всех упомянутых выше работах решающим фактором в формировании коллимированных струй частиц является сила аэродинамического сопротивления. Принципиально другой механизм фокусировки инерционных частиц может проявляться в сильно неоднородных сдвиговых течениях, когда на частицу действует боковая подъемная силы (сила Сэфмана [106] или ее аналоги), вызванная градиентом поперечной скорости, существенным на масштабе частицы. В работах [4, 98] показана возможность формирования зон накопления частиц на границе пограничного слоя за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью по запыленному газу или вдоль эродирующего слоя дисперсного осадка. В [41] описана миграция частиц по направлению к центру канала только под действием силы Сэфмана, возникающей из-за наличия градиента поперечной скорости в профиле Пуазейля. В работах I.S. Akhatov *et al.* [40–42] теоретически и экспериментально продемонстрирован эффект фокусировки аэрозольных частиц, движущихся в слабо сужающемся микрокапилляре под действием как боковой, так и продольной силы. В таком случае частицы не рассеиваются, оставаясь собранными вблизи оси даже после выхода из канала. Данный эффект использован для модификации соплового блока, создающего фокусированные пучки микрочастиц, предназначенные

для производства микросхем с помощью так называемой «direct-write» технологии.

Аккумуляция субмикронных частиц в пограничных слоях может происходить и под действием сил, проявляющихся при конечных числах Кнудсена обтекания частиц, например, термофоретических сил (Ю.М. Циркунов, Н.В. Тарасова [38]).

Взаимодействие головной ударной волны с косым скачком уплотнения

Одним из очень важных в прикладном отношении примеров течений с взаимодействующими ударными волнами является обтекание затупленного тела стационарным гиперзвуковым потоком при наличии падающего на тело косоугольного скачка уплотнения. В гиперзвуковой аэродинамике такое течение является базовым тестовым примером, на котором оцениваются пиковые тепловые нагрузки элементов гиперзвуковых летательных аппаратов, поскольку в результате взаимодействия скачков может происходить многократное увеличение локальных тепловых потоков по сравнению со случаем отсутствия падающего косоугольного скачка.

Даже в случае чистого газа изучение особенностей течения и теплообмена вблизи поверхности тела при падении косоугольного скачка на головную ударную волну является сложной проблемой, поскольку в таких течениях возникают разнообразные структуры (отраженные скачки, вихри, высоконапорные сверхзвуковые струи), обусловленные взаимодействиями различных элементов течения (сильных разрывов между собой, ударной волны с пограничным слоем и т.п.). Моделирование подобных течений и проведение численных расчетов осложняется необходимостью одновременно учитывать разномасштабные эффекты, связанные с вязкостью, сжимаемостью и сильной неоднородностью потока.

Исследования таких взаимодействий было начато в 60-е годы XX века.

Достаточно подробный обзор литературы по данной тематике содержится в монографии В.Я. Борового [2]. Экспериментально была обнаружена возможность формирования в дозвуковом потоке за точкой пересечения волн узкой высоконапорной сверхзвуковой струи, вызывающей локальное повышение давления и плотности теплового потока [34, 35, 55, 56]. В работах [55, 56] В.Е. Edney провел классификацию течений, образующихся при интерференции ударных волн, и выделил шесть типов взаимодействия в зависимости от интенсивности и положения падающего скачка уплотнения. Экспериментально было установлено [70], что при III и IV типах взаимодействия давление и тепловой поток имеют локальные максимумы на поверхности тела, которые в несколько раз превышают значения давления и теплового потока в критической точке на теле при отсутствии падающего скачка уплотнения. Дальнейшие экспериментальные исследования касались проблемы влияния на структуру течения и теплообмен различных параметров: чисел Рейнольдса и Маха, угла между косым скачком и набегающим потоком, положения скачка относительно тела, формы затупленного тела и др. [3, 48, 70, 120]. Теоретические работы [66, 84, 112] касались в основном вопроса применимости и точности различных численных методов для исследования сложной структуры взаимодействия скачков и способов вычисления тепловых потоков.

В реальных приложениях атмосфера, в которой движется гиперзвуковой летательный аппарат, может содержать инородные включения, что может многократно усугубить проблему пиковых локальных тепловых нагрузок на обтекаемую поверхность. К сожалению, в литературе в основном рассматривались лишь задачи обтекания тел однородными запыленными потоками, и не затрагивался вопрос о влиянии взаимодействия ударных волн на формирование высокоэнтальпийных струй частиц в ударных слоях.

Обтекание затупленных тел запыленным газом

Первые работы, посвященные изучению обтекания тел двухфазными потоками, относятся к середине 70-х годов XX века, их появление стимулировалось актуальными проблемами аэродинамики, теплоэнергетики и ракетной техники. К числу таких проблем относятся: падение сверхзвуковых струй ракетных двигателей, содержащих частицы твердого топлива, на детали конструкций ракеты, теплозащита летательных аппаратов, движущихся в запыленной атмосфере, течение двухфазных теплоносителей в трактах энергетических установок и пр. Различным аспектам проблемы обтекания тел запыленным потоком посвящены монографии [5, 24, 39].

Существует два различных режима обтекания затупленных тел запыленным потоком: режим течения при наличии инерционного осаждения частиц на поверхность тела и режим, при котором выпадения частиц на поверхность не происходит. Математические модели, применяемые для описания указанных режимов, существенно различаются. В работах [5, 13–15, 29, 36, 37, 80] исследовались траектории частиц различной инерционности и были установлены границы режима осаждения частиц в зависимости от свойств дисперсной фазы и разнообразных внешних условий течения.

Частицы могут оказывать воздействие на обтекаемую поверхность как непосредственно, то есть отдавая часть импульса и энергии при контакте с поверхностью (очевидно, что это возможно только в режиме осаждения частиц), так и косвенными путями. К последним можно отнести: изменение поля течения несущей фазы падающими и отраженными частицами; нарушение ламинарной структуры пограничного слоя за счет шероховатости, создаваемой частицами при ударе о поверхность тела; турбулизацию потока в пристеночной зоне за счет большого количества отраженных частиц и продуктов эрозионного разрушения поверхности.

Один из главных вопросов при исследовании обтекания тел потоком газозвеси – каким образом изменится теплообмен вблизи тела и насколько

могут увеличиться тепловые потоки к поверхности тела благодаря наличию дисперсной примеси. В работах [54, 61, 75, 76] представлены результаты экспериментальных исследований по обтеканию затупленных тел запыленным потоком с достаточно крупными, выпадающими на тело частицами. Из этих результатов следует, что значение теплового потока в критической точке может увеличиваться на порядок по сравнению с обтеканием тел чистым газом. Попытка определить, какая доля кинетической энергии переходит в тепловую (коэффициент аккомодации) при соударении частиц со стенкой, предпринята в работах [54, 61]. Установлено, что в широком диапазоне параметров набегающего потока и для частиц диаметром порядка 100 мкм, коэффициент аккомодации в критической точке можно считать равным 70%.

В работе [32] экспериментально исследовалось влияние различных факторов на распределение тепловых потоков при обтекании плоских или осесимметричных затупленных тел запыленным газом. В частности, было установлено, что форма и размер тела оказывают незначительное влияние на теплообмен вблизи поверхности, в отличие от случая обтекания тел чистым газом. В [6] построена и экспериментально проверена феноменологическая модель конвективного теплообмена на лобовой поверхности затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым запыленным потоком.

В целом, на величину тепловых потоков при обтекании тел гетерогенным потоком влияет множество факторов, определяемых свойствами дисперсной фазы, характеристиками набегающего потока и формой обтекаемой поверхности. В монографии [24] освещены основные результаты экспериментальных исследований по воздействию дисперсных частиц на лобовую поверхность тел, движущихся со сверхзвуковой скоростью.

В работах Осипцова А.Н. и соавторов [15, 28, 29] были проведены теоретические исследования обтекания затупленных тел потоком с тонкодисперсной примесью. Была построена модель двухфазного пограничного слоя при отсутствии выпадения частиц на поверхность как в случае дозвукового [28], так и для сверхзвукового течения [29]. Показано, что малоинерционные частицы

скапливаются в пристеночной зоне, что даже при небольшой концентрации частиц в набегающем потоке приводит к увеличению конвективного теплового потока в критической точке примерно в два раза. В работе Э.Б. Василевского [7] этот эффект был подтвержден экспериментально. В [15] проведен теоретический анализ обтекания сферы сверхзвуковым потоком запыленного газа и дано подробное параметрическое исследование тепловых потоков в критической точке как для режима инерционного осаждения частиц, так и для режима, при котором не происходит выпадения частиц на поверхность сферы. Выявлен немонотонный характер зависимости величины тепловых потоков от инерционности частиц.

При достаточно высокой концентрации инерционных частиц может происходить экранирование падающих частиц отраженными [31] и, следовательно, уменьшение воздействия частиц на обтекаемую поверхность, в таком случае при моделировании течения необходимо учитывать «собственные напряжения» в среде частиц.

Серия работ Ю.М. Циркунова и А.Н. Волкова [8, 9, 114, 116] посвящена изучению влияния частиц на течение несущей фазы и теплообмен при сверхзвуковом обтекании цилиндра запыленным потоком. При обтекании тел с радиусом затупления 1 см и атмосферных условиях рассматривались частицы размером от 0.1 до 10 мкм с объемной концентрацией в диапазоне $10^{-6} - 10^{-4}$. В [8,9] течение анализировалось с учетом столкновений падающих и отраженных частиц. Определены критические размеры частиц, которые соответствуют нижней границе режима инерционного осаждения частиц. Установлено, что тепловой поток в точке торможения со стороны дисперсной фазы начинает доминировать, если радиус частиц в три и более раз превышает критический радиус. Наиболее интенсивный рост тепловых потоков обеих фаз получен в случае, когда радиус частиц равен или слегка превышает критический радиус, при этом важно учитывать возможность столкновений между частицами. В случае «докритических» частиц или объемной концентрации частиц, не превышающей значение 10^{-5} , столкновения практически не влия-

ют на течение и теплообмен.

Подводя итог обзору литературы, можно сделать вывод, что несмотря на большое количество публикаций, посвященных различным аспектам течений с ударными волнами в многофазных средах, ряд важных проблем остаются незатронутыми либо изученными недостаточно подробно. К таким проблемам относится изучение взаимодействия ударных волн в стационарных запыленных потоках, определение условий возникновения волн в полной дисперсией, а также аккуратный расчет поля концентрации дисперсной фазы в течениях с газодинамическими разрывами и исследование условий возникновения эффектов аэродинамической фокусировки частиц. Этим проблемам и посвящена настоящая диссертация.

Глава 2. Модель запыленного газа

2.1 Основные уравнения модели запыленного газа

В механике многофазных сред в настоящее время общепринятым является подход, основанный на модели взаимопроникающих континуумов [25]. Согласно этой модели, в любом бесконечно малом объеме смеси находится достаточно много элементарных частиц каждой из фаз (если только концентрация данной фазы в рассматриваемой точке не равна нулю), так что для всех компонентов применима модель сплошной среды. Для каждой точки объема можно определить макроскопические параметры всех фаз. Взаимодействие между фазами осуществляется за счет обмена массой, импульсом и энергией.

Предполагается, что дисперсные частицы представляют собой твердые недеформируемые сферы. В данной работе используется монодисперсная модель запыленного газа, то есть предполагается, что все частицы состоят из одного и того же вещества и имеют одинаковые радиус σ и массу m . Считается, что такие характеристики вещества, как плотность, теплоемкость, температура и т.п., внутри частицы постоянны.

В работе предполагается, что объемная доля твердых частиц пренебрежимо мала. Поскольку отношение плотности вещества частиц ρ_s^0 к плотности несущей фазы ρ в запыленном газе имеет порядок 10^3 , то масса твердой фазы при этом может составлять значительную долю от общей массы смеси.

Необходимо упомянуть об условии, которому должны удовлетворять линейные масштабы при рассмотрении практически любых течений запыленного газа:

$$\lambda \ll \sigma \ll \lambda_s \ll L, \quad (2.1)$$

где λ – длина свободного пробега молекул газа, λ_s – среднее расстояние между

частицами, L – некоторый характерный размер задачи. Первое из неравенств характеризуется числом Кнудсена $Kn = \lambda/\sigma$, и при $Kn \ll 1$ можно рассматривать обтекание частицы газом как сплошной средой. В силу последнего неравенства множество частиц можно рассматривать как континуум.

При исследовании течений запыленного газа в литературе общепринятыми считаются следующие два допущения: во-первых, дисперсные частицы достаточно инерционные и поэтому не подвержены броуновскому движению; во-вторых, среда частиц является довольно разреженной, следовательно, межчастичные столкновения маловероятны. Вследствие этих предположений собственными напряжениями в среде частиц можно пренебречь, а термодинамическую температуру дисперсной фазы считать равной нулю. Таким образом, дисперсная фаза может быть описана с помощью модели «холодного» континуума [26].

Поскольку в работе будут рассматриваться в основном течения с сильными разрывами, следует упомянуть о важном допущении, принимаемом обычно в таких случаях, что частицы «не чувствуют» газодинамического разрыва, то есть сразу за разрывом параметры дисперсной фазы имеют те же значения, что и до разрыва. В работе [94] было показано, что это допущение справедливо даже при $\sigma/\lambda \approx 2$.

В отношении несущей фазы предполагается, что это совершенный газ с постоянными теплоемкостями c_p и c_v . В большинстве задач, рассматриваемых в диссертации (за исключением пятой главы), при исследовании течения на макромасштабе предполагается, что динамическая вязкость μ и теплопроводность λ газа не играют существенной роли, и потому не учитываются. Однако при описании межфазного обмена импульсом и энергией (т.е. на микромасштабе частицы) необходимо учитывать эти характеристики газа.

Учитывая все вышеизложенные предположения, для стационарного течения запыленного газа законы сохранения массы, импульса и энергии несущей и дисперсной фаз соответственно могут быть записаны в виде:

$$\operatorname{div}(\rho^* \mathbf{V}^*) = 0$$

$$\rho^*(\mathbf{V}^* \nabla) \mathbf{V}^* = -\nabla p^* - n_s^* \mathbf{f}_s \quad (2.2)$$

$$c_p \rho^*(\mathbf{V}^* \nabla) T^* = (\mathbf{V}^* \nabla) p^* - n_s^* q_s + n_s^* \mathbf{f}_s (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*)$$

$$\operatorname{div}(\rho_s^* \mathbf{V}_s^*) = 0$$

$$\rho_s^*(\mathbf{V}_s^* \nabla) \mathbf{V}_s^* = n_s^* \mathbf{f}_s \quad (2.3)$$

$$c_s \rho_s^*(\mathbf{V}_s^* \nabla) T_s^* = n_s^* q_s$$

Здесь звездочкой обозначены размерные параметры, которые необходимо отличать от соответствующих безразмерных, индексом s обозначены параметры частиц; ρ^* , \mathbf{V}^* , p^* , T^* – плотность, скорость, давление и температура газовой фазы; ρ_s^* , n_s^* , \mathbf{V}_s^* , T_s^* – плотность, числовая концентрация, скорость и температура дисперсной фазы; c_s – теплоемкость вещества частиц; \mathbf{f}_s и q_s – члены, отвечающие за межфазный обмен импульсом и энергией.

В общем случае \mathbf{f}_s является суммой сил различного происхождения, действующих на отдельную частицу со стороны несущей фазы. При малых числах Рейнольдса обтекания частиц $\operatorname{Re}_s = 2\sigma\rho^*|\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*|/\mu^*$ силу \mathbf{f}_s можно представить в следующем виде [89]:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{BB} + \mathbf{f}_l$$

$$\mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*), \quad \mathbf{f}_A = \rho^*\tau_s(\mathbf{w} - \mathbf{g}), \quad \mathbf{f}_m = \frac{1}{2}\rho^*\tau_s\left(\mathbf{w} - \frac{d\mathbf{V}_s^*}{dt}\right)$$

Здесь \mathbf{f}_{St} – стационарная сила Стокса, \mathbf{f}_A – сила Архимеда, \mathbf{f}_m – сила присоединенных масс, \mathbf{f}_{BB} – сила Бассе-Буссинеска, \mathbf{f}_l – подъемная сила. Перечисленные силы действуют на сферическую частицу объема τ_s , движущуюся со скоростью \mathbf{V}_s^* в среде с вязкостью μ^* , скоростью \mathbf{V}^* и ускорением \mathbf{w} .

В монографии [25] было показано, что в течениях запыленного газа основной силой, действующей на частицы, является сила аэродинамического

сопротивления. Сила присоединенных масс и сила Архимеда могут быть исключены, поскольку их отношение к силе аэродинамического сопротивления имеет порядок отношения ρ^*/ρ_s^0 . Выражение для силы Бассэ-Буссинеска, учитывающей предысторию обтекания частицы, было получено при довольно строгих ограничениях на характер движения частицы [89]. Существующие оценки показывают, что в большинстве случаев эффект этой силы на движение частицы несущественен, поэтому в дальнейшем этой силой пренебрегается. Инерционная подъемная сила \mathbf{f}_l может возникать за счет сдвигового характера течения несущей фазы на масштабе частицы. В задачах, рассмотренных в диссертации, потоки газа с градиентом поперечной скорости могут иметь место только в узких локальных зонах и не способны оказывать существенного влияния на движение частиц, поэтому сила \mathbf{f}_l также не учитывается.

Таким образом, в уравнениях (2.2)-(2.3) сила межфазного взаимодействия \mathbf{f}_s равна силе аэродинамического сопротивления. Поскольку число Рейнольдса обтекания частиц в рассматриваемых видах течения меняется в широком диапазоне, то использовать приведенное выше выражение для этой силы некорректно. Большое количество литературы посвящено проблеме расчета поправочного коэффициента к силе аэродинамического сопротивления в зависимости от условий обтекания частицы. В данной работе используется формула, впервые предложенная в работе Carlson D.J., Hoglund R.F. [49], которая аппроксимирует экспериментальные данные в широком диапазоне значений числа Рейнольдса обтекания частиц и относительного числа Маха $M_s = |\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*|/a$:

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*) \cdot C_f(M_s, Re_s) , \quad (2.4)$$

$$C_f(M_s, Re_s) = \frac{(1 + Re_s^{2/3}/6)(1 + \exp(-0.427M_s^{-4.63})\exp(-3Re_s^{-0.88}))}{1 + M_s/Re_s(3.82 + 1.28\exp(-1.25Re_s/M_s))}$$

В уравнениях (2.2) - (2.3) используется также межфазный поток тепла в виде

$$q_s = 4\pi\sigma\lambda^*(T^* - T_s^*) \cdot C_q(M_s, Re_s, Pr) \quad (2.5)$$

Коэффициент C_q , полученный в той же работе [49], имеет вид:

$$C_q(M_s, Re_s, Pr) = \frac{Nu_0}{1 + 3.42M_s Nu_0 / Re_s / Pr}, \quad Nu_0 = 1 + 0.3\sqrt{Re_s} \sqrt[3]{Pr}$$

Чтобы получить замкнутую систему, к уравнениям (2.2)-(2.3) следует добавить уравнение состояния для газовой фазы и соотношения для вычисления динамической вязкости и теплопроводности газа. В работе используется модель совершенного газа и степенной закон зависимости вязкости и теплопроводности от температуры:

$$p^* = \rho^* R T^*$$

$$\frac{\mu^*}{\mu_0} = \frac{\lambda^*}{\lambda_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{0.76}$$

Приведем систему (2.2)-(2.3) к безразмерному виду. Рассматривая течение запыленного газа вблизи уединенной ударной волны или системы взаимодействующих волн, будем считать, что в области перед приходящими скачками уплотнения поток невозмущенный и однородный, и, кроме того, равновесный, то есть скорости и температура частиц и газа совпадают. Параметры фаз в невозмущенном потоке, а именно, $V_0, \rho_0, p_0, T_0, \mu_0, \lambda_0, n_{s0}$, будем считать характерными величинами при обезразмеривании. В качестве характерного расстояния используем некоторую величину L , значение которой будет определено отдельно для каждого из рассматриваемых в работе типов течений. Таким образом, замкнутая безразмерная система уравнений, имеет вид:

$$div(\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \nabla p - \alpha \beta n_s \mu (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) C_f \quad (2.6)$$

$$\rho(\mathbf{V} \nabla) T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\mathbf{V} \nabla) p - \frac{2 \alpha \beta}{3 Pr} n_s \lambda (T - T_s) C_q + \alpha \beta n_s \mu (\gamma - 1) M_0^2 (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)^2 C_f$$

$$p = \rho T$$

$$\mu = \lambda = T^{0.76}$$

$$\operatorname{div}(\rho_s \mathbf{V}_s) = 0$$

$$(\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s = \beta \mu (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) C_f \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{V} \nabla) T_s = \frac{2}{3} \frac{\beta}{\chi \operatorname{Pr}} \lambda (T - T_s) C_q$$

$$\alpha = n_{s0} m / \rho, \quad \beta = L / l_\tau, \quad \gamma = c_p / c_v, \quad \chi = c_s / c_p$$

$$M_0 = V_0 / \sqrt{\gamma R T_0}, \quad \operatorname{Re}_{s0} = 2 \sigma \rho_0 V_0 / \mu_0, \quad \operatorname{Pr} = c_p \mu_0 / \lambda_0$$

Здесь безразмерные величины обозначены теми же символами, что и их размерные аналоги со звездочками. Уравнения содержат следующие безразмерные параметры: относительную массовую концентрацию частиц α , параметр инерционности частиц β ($l_\tau = m V_0 / (6 \pi \sigma \mu_0)$ – длина скоростной релаксации частиц, вычисленная для стоксовского закона обтекания частиц), показатель адиабаты несущей фазы γ , отношение теплоемкостей вещества фаз χ , число Маха невозмущенного потока M_0 , характерное число Рейнольдса обтекания частиц Re_{s0} , число Прандтля Pr .

Одним из часто встречающихся в механике многофазных сред предельных случаев течения является случай малой массовой концентрации дисперсных частиц $\alpha \ll 1$. В таком случае частицы не оказывают влияния на несущую фазу и членами в уравнениях (2.6), отвечающими за межфазное взаимодействие, можно пренебречь. В этом случае, задачи о течении несущей фазы и движении частиц решаются независимо.

Другим важным предельным случаем является течение при больших значениях параметра инерционности частиц $\beta \gg 1$. Это означает, что масштаб областей, в которых течение газа с частицами неравновесно, много меньше характерного линейного масштаба задачи. Следовательно, можно считать, что динамические параметры фаз совпадают во всей рассматриваемой области

течения, и можно ввести односкоростную однотемпературную модель запыленного газа, то есть рассматривать смесь газ-частицы как некоторую однородную среду («эффективный газ») с параметрами, определяемыми осредненными по массе параметрами двух фаз. Пример использования модели «эффективного газа» с целью определения глобальных характеристик гетерогенного потока будет продемонстрирован в Главе 3.

2.2 Полный лагранжев метод

Течение дисперсной фазы описывается уравнениями «холодного» континуума (2.3), одним из характерных черт которого является высокая сжимаемость и возможность возникновения областей, в которых траектории частиц пересекаются, – так называемых «сборок», «складок» и «шнуров». С этим явлением связаны основные трудности при моделировании течения дисперсных сред. При исследовании течений, где существует вероятность появления таких областей, применение эйлерова подхода приводит к некорректным результатам. Лагранжевы методы типа метода частиц-в-ячейках также применяются для расчета движения частиц, однако такие методы являются слишком грубыми и не позволяют с необходимой точностью вычислять концентрацию частиц в областях пересекающихся траекторий частиц. В [26] был предложен альтернативный способ расчета параметров дисперсной фазы, названный полным лагранжевым подходом. Данный метод основан на привлечении дополнительных уравнений для компонентов якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным, которые совместно с уравнениями движения и неразрывности, записанными в лагранжевой форме, позволяют вычислять концентрацию частиц вдоль выбранных траекторий из решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В последние годы данный метод активно используется для исследования обтекания тел запыленным газом [113], двухфазных течений в трактах турбомашин [73, 74], подъема пыли за ударными волнами [119], кластеризации частиц в турбулентных потоках [101] и др.

Согласно лагранжеву подходу рассмотрим движение индивидуального объема дисперсной фазы. Поскольку хаотическое движение в среде частиц отсутствует, то скорость каждой отдельно взятой частицы из этого объема равна макроскопической скорости дисперсной фазы в данной точке. Поэтому в дальнейшем будем использовать понятие траектории частицы, подразумевая траекторию движения индивидуального объема дисперсной фазы. Таким образом, задача определения течения дисперсной фазы состоит в нахождении отдельных траекторий частиц и определении параметров частиц вдоль каждой из рассматриваемых траекторий.

В качестве лагранжевых координат возьмем значения декартовых координат выбранной частицы x_{i0} ($i = 1, 2, 3$) в некоторый момент времени, принятый за начало отсчета $t = 0$. Пусть \mathbf{r}_s – радиус-вектор частицы, \mathbf{V}_s^*, T_s^* – скорость и температура частиц. Уравнения движения и баланса энергии частиц, записанные в лагранжевой форме при фиксированных значениях x_{i0} , имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_s}{dt} &= \mathbf{V}_s^* \\ m \frac{d\mathbf{V}_s^*}{dt} &= \mathbf{f}_s \\ c_s m \frac{dT_s^*}{dt} &= q_s\end{aligned}\tag{2.8}$$

Уравнение неразрывности в лагранжевой форме имеет вид:

$$n_s^* |\det \mathbf{J}| = n_{s0}\tag{2.9}$$

Здесь \mathbf{J} – матрица Якоби перехода от эйлеровых координат к лагранжевым: $\mathbf{J} = ||J_{ij}|| = ||\partial x_i / \partial x_{i0}||$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8) позволяет вычислить траектории и распределение скорости и температуры частиц вдоль них. Для вычисления числовой концентрации частиц может быть использовано уравнение (2.9) при условии, что компоненты якобиана известны. Обычно

сила межфазного взаимодействия \mathbf{f}_s считается известной функцией скоростей и температур фаз и, возможно, других параметров несущей фазы, и не зависит явно от концентрации частиц. Последнее условие позволяет вывести замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент J_{ij} на траектории частиц. Для получения указанной системы необходимо первые два уравнения системы (2.8) продифференцировать по лагранжевым координатам x_{0i} и поменять порядок дифференцирования:

$$\frac{dJ_{ij}}{dt} = \Omega_{ij}, \quad \frac{d\Omega_{ij}}{dt} = \Phi_{ij} \quad (2.10)$$

Здесь $\Omega_{ij} = \partial V_{si}^*/\partial x_{0j}$, Φ_{ij} – функции, известным образом зависящие от $J_{ij}, \Omega_{ij}, V_{si}^*$ и параметров несущей фазы. Таким образом, уравнения (2.8) совместно с (2.10) составляют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих определить все параметры дисперсной фазы вдоль выбранной траектории частиц, а затем, используя конечное соотношение (2.9), вычислить числовую концентрацию частиц. Для трехмерных неустановившихся течений порядок полученной системы ОДУ равен 25, для двумерных – 13.

Начальные условия, необходимые для решения уравнений (2.10), получаются естественным образом из граничных условий для дисперсной фазы и индивидуальны для каждого частного случая.

В случае стационарного течения траектория отдельно взятой частицы не меняется со временем, поэтому $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{V}_{s0} \Delta t$ и справедливо выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_s(\mathbf{r}_0, t)}{\partial \mathbf{r}_0} &= \lim_{\Delta r_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_s(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_s(\mathbf{r}_0, t)}{\Delta r_0} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_s(\mathbf{r}_0, t + \Delta t) - \mathbf{r}_s(\mathbf{r}_0, t)}{V_{s0} \Delta t} = \frac{\mathbf{V}_s^*}{V_{s0}} \end{aligned}$$

Таким образом, часть компонентов якобиана можно выразить через компоненты скорости частиц [26], что позволяет сократить количество уравнений в системе (2.8)-(2.10) на 6 в случае трехмерных течений и на 4 в двумерном

случае.

Предложенный метод расчета концентрации частиц устраняет проблему пересекающихся траекторий, так как различным траекториям, проходящим через одну и ту же точку физического пространства, соответствуют различные значения лагранжевых координат x_{i0} . Границы областей пересекающихся траекторий также легко определяются в процессе расчета, поскольку на них якобиан обращается в ноль. Расчет концентрации можно продолжить за точку пересечения траекторий частиц, при этом для автоматического учета возникновения «складки» определитель в уравнении неразрывности среды частиц (2.9) взят по модулю.

Выведем систему уравнений на фиксированной траектории частиц для частного случая, рассматриваемого в настоящей работе, а именно, для двумерного стационарного течения, когда сила межфазного взаимодействия имеет вид (2.4), а межфазный поток тепла – вид (2.5). Приведем уравнения (2.8), (2.9) к безразмерному виду, используя в качестве характерных масштабов величины, введенные ранее ($L, V_0, \rho_0, T_0, \mu_0, n_{s0}$):

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= u_s, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s \\ \frac{du_s}{dt} &= \beta\mu(u - u_s) C_f(M_s, Re_s) \\ \frac{dv_s}{dt} &= \beta\mu(v - v_s) C_f(M_s, Re_s) \\ \frac{dT_s}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{\beta}{\chi Pr} \lambda(T - T_s) C_q \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$n_s |J| = 1 \tag{2.12}$$

Как было показано выше, якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым можно представить в виде:

$$J = u_s \frac{\partial y_s}{\partial y_0} - v_s \frac{\partial x_s}{\partial y_0}$$

Для вычисления недостающих компонентов $\partial x_s/\partial y_0$ и $\partial y_s/\partial y_0$ продифференцируем уравнения (2.11) по координате y_0 и затем поменяем порядок дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= g, \quad \frac{df}{dt} = h \\ \frac{dg}{dt} &= \beta\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} e + \frac{\partial u}{\partial y} f - g \right) C_f + \beta\mu(u - u_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0} + \beta(u - u_s) C_f \frac{\partial \mu}{\partial y_0} \\ \frac{dh}{dt} &= \beta\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} e + \frac{\partial v}{\partial y} f - h \right) C_f + \beta\mu(v - v_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0} + \beta(v - v_s) C_f \frac{\partial \mu}{\partial y_0} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь введены обозначения:

$$e = \frac{\partial x_s}{\partial y_0}, \quad f = \frac{\partial y_s}{\partial y_0}, \quad g = \frac{\partial u_s}{\partial y_0}, \quad h = \frac{\partial v_s}{\partial y_0}$$

Явные выражения для производных по лагранжевым координатам от вязкости и поправочного коэффициента к закону сопротивления частицы приведены в Приложении I.

Глава 3. Возникновение волн с полной дисперсией при взаимодействии скачков уплотнения в запыленном газе

3.1 Равновесная модель гетерогенного потока и ее использование для классификации режимов взаимодействия

В данной главе рассматривается задача о взаимодействии плоских скачков уплотнения в запыленном газе при конечной массовой концентрации частиц и исследуется вопрос об условиях вырождения некоторых (или всех) из входящих/исходящих волн в волны с полной дисперсией.

Прямые ударные волны в многофазных средах имеют следующую структуру (см. рис. 3.1, *a*): до волны находится область равновесного течения (область θ), далее в поле параметров несущей фазы имеет место разрыв (UB), который дисперсные частицы, в силу своей инерционности, проходят без существенных изменений, далее следует зона релаксации (область 1), в которой происходит процесс выравнивания скоростей и температур фаз, в результате чего наступает новое состояние равновесия (область 2).

Рассмотрим течение запыленного газа при конечной массовой концентрации частиц $\alpha \sim 1$ в предположении $L \gg l_\tau$, где L – некоторый характерный размер задачи. Из уравнений (2.7) следует, что в пределе $\beta \rightarrow \infty$ скорости и температуры фаз равны $\mathbf{V} = \mathbf{V}_s$, $T = T_s$. Таким образом, исследование двухфазного потока на масштабах длины, значительно превосходящих длину скоростной релаксации частиц, можно проводить с использованием равновесной (односкоростной, однотемпературной) модели [22, 105], то есть вместо изу-

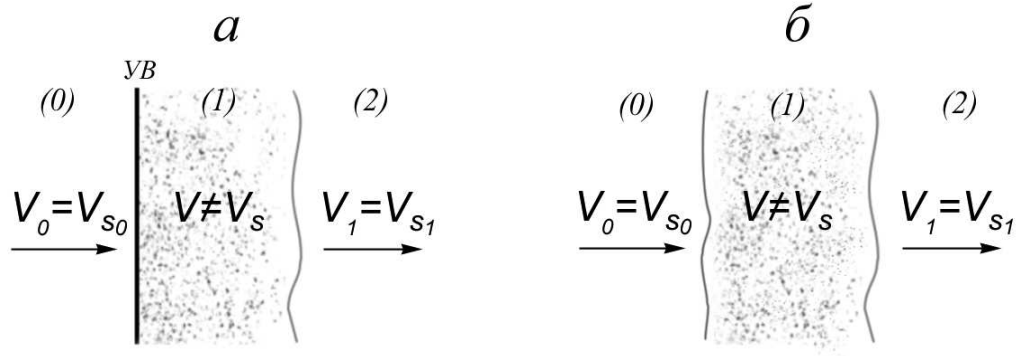


Рис. 3.1: Схема течения запыленного газа вблизи ударной волны (а) и волны с полной дисперсией (б)

чения отдельных фаз рассматривать течение некоторой фиктивной среды, динамические параметры которой совпадают с равновесными параметрами смеси, а остальные определяются по среднемассовому значению параметров двух фаз. Давление в этой новой среде остается равным давлению в чистом газе, поскольку в среде частиц собственные напряжения отсутствуют. Если объемной долей твердой фазы пренебречь, то плотность и теплоемкости «эффективного газа», обозначаемые индексом ef , имеют вид:

$$\rho_{ef}^* = \rho^* + \rho_s^*, \quad c_{p\ ef} = \frac{c_p \rho^* + c_s \rho_s^*}{\rho^* + \rho_s^*}, \quad c_{v\ ef} = \frac{c_v \rho^* + c_s \rho_s^*}{\rho^* + \rho_s^*} \quad (3.1)$$

Безразмерные параметры «эффективного газа» – плотность, показатель адиабаты и квадрат числа Маха – выражаются тогда следующим образом:

$$\rho_{ef} = \rho(1 + \alpha), \quad \gamma_{ef} = \gamma \frac{1 + \alpha\chi}{1 + \alpha\gamma\chi}, \quad M_{ef0}^2 = M_0^2 \frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha\gamma\chi)}{1 + \alpha\chi} \quad (3.2)$$

Безразмерные уравнения «эффективного газа» можно получить формально, сложив поочередно уравнения системы (2.6) с соответствующими уравнениями системы (2.7) и исключив межфазный обмен, а затем перейдя к пределу $\beta \rightarrow \infty$ и взяв в качестве нового масштаба плотности среды суммарную плотность среды в невозмущенном потоке:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_{ef} \mathbf{V}) &= 0 \\ \rho_{ef} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{\gamma_{ef} M_{ef}^2} \nabla p \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\rho_{ef}(\mathbf{V}\nabla)T = \frac{\gamma_{ef} - 1}{\gamma_{ef}} M_{ef}^2 (\mathbf{V}\nabla)p$$

При выбранном обезразмеривании $\rho_{ef} = \rho$. Видно, что в безразмерной форме уравнения «эффективного газа» совпадают с обычными уравнениями Эйлера с двумя измененными параметрами подобия – показателем адиабаты и числом Маха, поэтому анализ глобальных свойств течений запыленного газа в рассматриваемом приближении может быть проведен с использованием известных результатов классической газовой динамики.

Из последнего соотношения (3.2) следует, что число Маха по чистому газу всегда меньше «эффективного» числа Маха. Следовательно, в запыленном газе возможны течения, в которых $M_{ef} > 1$ но $M < 1$, то есть течения, которые, будучи рассмотренными на масштабах, много больших зон скоростной и тепловой релаксации фаз, имеют свойства сверхзвуковых потоков, а по сути, являются дозвуковыми течениями, в которых не возникает разрывов параметров несущей фазы. Волна сжатия в таком случае представляет собой зону непрерывного изменения параметров фаз (см. рис. 3.1, б). Такие волны называются волнами с полной дисперсией. Пользуясь выражением для «эффективного» числа Маха из (3.2), условия существования прямой волны с полной дисперсией в потоке запыленного газа можно записать в виде:

$$\frac{1 + \alpha\chi}{(1 + \alpha)(1 + \alpha\gamma\chi)} < M_0^2 \leq 1 \quad (3.4)$$

В случае косых волн под «эффективным» числом Маха и числом Маха по чистому газу следует понимать числа Маха, посчитанные по нормальной к волне компоненте скорости.

На рис. 3.2 представлен набор кривых для различных значений α в плоскости параметров χ , M_0 , которые ограничивают снизу области параметров, соответствующие волнам с полной дисперсией. Сверху все эти области ограничены прямой $M_0 = 1$. Очевидно, что с увеличением массовой концентрации частиц такие области значительно расширяются. Также видно, что отношение теплоемкостей слабо влияет на тип волны. В пределах рассматриваемо-

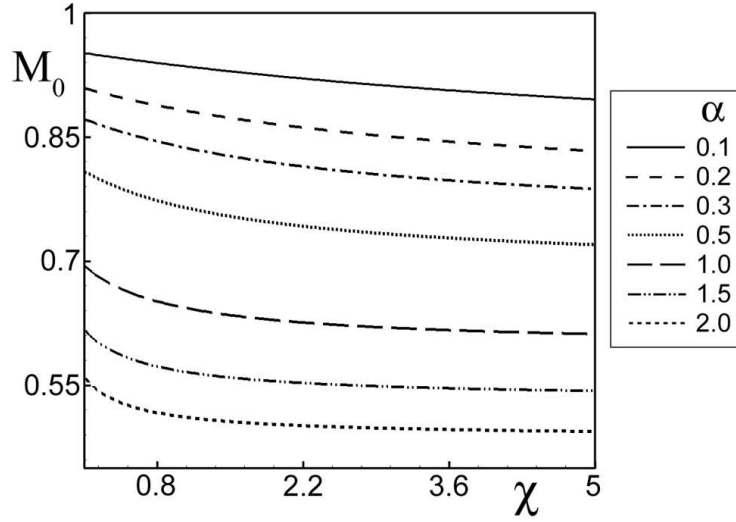


Рис. 3.2: Нижние границы областей существования прямой волны с полной дисперсией для различных значений массовой концентрации α

го диапазона значений параметра $\chi = [0.1; 5]$, обусловленного возможными вариациями физических характеристик вещества частиц, значение M_0 изменится не более чем на 10%.

Рассмотрим регулярное симметричное взаимодействие плоских стационарных волн в запыленном газе. Используем условия Рэнкина-Гюгонио для косых скачков в «эффективном газе» и связь «эффективных» параметров с параметрами чистого газа (3.2) для анализа условий возникновения волн с полной дисперсией при таком взаимодействии волн. В данном случае к рассмотренным выше параметрам подобия следует добавить угол между входящей волной и набегающим потоком φ_0 . Будем рассматривать диапазон параметров $M_0, \varphi_0, \alpha, \chi$, в котором для соответствующих «эффективных» параметров $M_{ef0}, \varphi_0, \gamma_{ef}$ существует решение задачи о регулярном взаимодействии скачков уплотнения [1].

Цель настоящего анализа – внутри данного диапазона определяющих параметров найти области, которые соответствуют различным волновым конфигурациям, включающим волны с полной дисперсией: а) $M_0 \sin \varphi_0 \leq 1$, $M_1 \sin \varphi_1 \leq 1$ – в этом случае и падающие, и отраженные волны вырож-

даются в волны с полной дисперсией (индекс l относится к параметрам отраженных волн); б) $M_0 \sin \varphi_0 > 1$, $M_1 \sin \varphi_1 \leq 1$ – только отраженные волны вырождаются в волны с полной дисперсией; в) $M_0 \sin \varphi_0 \leq 1$, $M_1 \sin \varphi_1 > 1$ – только падающие волны являются волнами с полной дисперсией. Из классической теории косых скачков уплотнения известна формула для числа Маха за падающей ударной волной, которую можно применить к параметрам «эффективного газа» и представить M_{ef1} следующим образом:

$$M_{ef1}^2 = \frac{2 + (\gamma_{ef} - 1)M_{ef0}^2}{2\gamma_{ef}M_{ef0}^2 \sin^2 \varphi_0 - (\gamma_{ef} - 1)} + \frac{2M_{ef0}^2 \cos^2 \varphi_0}{2 + (\gamma_{ef} - 1)M_{ef0}^2 \sin^2 \varphi_0}$$

Угол φ_1 между отраженной волной и потоком за проходящей волной может быть найден в результате решения квадратного уравнения:

$$A \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + B \operatorname{tg} \varphi_1 + C = 0$$

с коэффициентами

$$A = (\gamma_{ef} - 1)\varepsilon\tau^2 + (\gamma_{ef} + 1)\varepsilon - 2\varepsilon^2\tau,$$

$$B = -2\tau^2(\varepsilon^2 + 1), \quad C = (\gamma_{ef} - 1)\varepsilon\tau^2 + (\gamma_{ef} + 1)\varepsilon + 2\tau$$

$$\varepsilon = \frac{2\tau(M_{ef0}^2 + 1 + \tau^2)}{\tau^2(2 + (\gamma_{ef} + 1)M_{ef0}^2) + (\gamma_{ef} - 1)M_{ef0}^2 + 2}, \quad \tau = \operatorname{ctg} \varphi_0, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \delta$$

Здесь δ – угол поворота потока при прохождении через падающий скачок.

Параметрический анализ приведенных соотношений для косых скачков уплотнения в «эффективном газе» позволяет рассчитать области существования различных режимов в пространстве определяющих параметров. Результаты для случая а) представлены на рис. 3.3, а в плоскости параметров α , M_0 , где каждая из областей существования режима соответствует определенному значению φ_0 . В расчетах было положено $\chi = 1$, $\gamma = 1.4$. С увеличением угла φ_0 области параметров, при которых все волны являются волнами с полной дисперсией, заметно уменьшаются, но не исчезают совсем. На рис. 3.3, б, в изображены области параметров, отвечающие режимам б) и в) соответственно. Интересно, что существует максимальное значение угла $\varphi_0 \approx 47.7^\circ$,

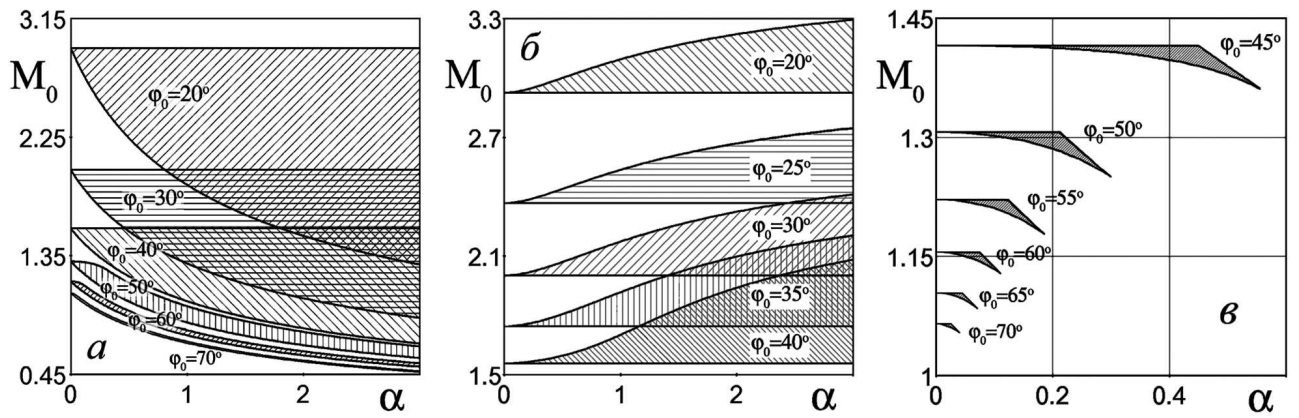


Рис. 3.3: Области параметров при $\chi = 1$, соответствующие симметричному взаимодействию волн, при котором волнами с полной дисперсией являются: и падающие, и отраженные волны (а), только отраженные волны (б), только падающие волны (в).

выше которого не может реализоваться режим течения, в котором только отраженные волны – волны с полной дисперсией. Также есть минимальный угол $\varphi_0 \approx 43.2^\circ$, ниже которого не существует решений, в которых только приходящие волны являются волнами с полной дисперсией.

Перейдем к исследованию несимметричного регулярного взаимодействия волн. С точки зрения разнообразия конфигураций этот случай гораздо более интересен, чем симметричный. Если предположить, что интенсивность первой волны меньше или равна интенсивности второй волны, то есть $\varphi_0 \leq \psi_0$, где φ_0 и ψ_0 – углы падения первой и второй волны соответственно, то возможны 9 различных конфигураций с ударными волнами и волнами с полной дисперсией (рис. 3.4). Аналогично симметричному случаю, можно определить диапазон значений $M_0, \varphi_0, \psi_0, \alpha, \chi$, соответствующих «эффективным» параметрам $M_{ef0}, \varphi_0, \psi_0, \gamma_{ef}$, для которых существует решение задачи о регулярном несимметричном взаимодействии ударных волн [1]. Затем, оценивая для каждой из четырех взаимодействующих волн «замороженное» число Маха, можно определить, какие из них будут волнами с частичной, а какие – с полной дисперсией. Как и для симметричного случая, положим $\chi = 1, \gamma = 1.4$. Результаты параметрического исследования для несимметричного взаимо-

действия волн представлены на рис. 3.5, где для нескольких наборов значений углов φ_0, ψ_0 в плоскости параметров M_0, α изображены области, соответствующие различным конфигурациям взаимодействия ударных волн и волн с полной дисперсией (нумерация областей соответствует схеме на рис. 3.4).

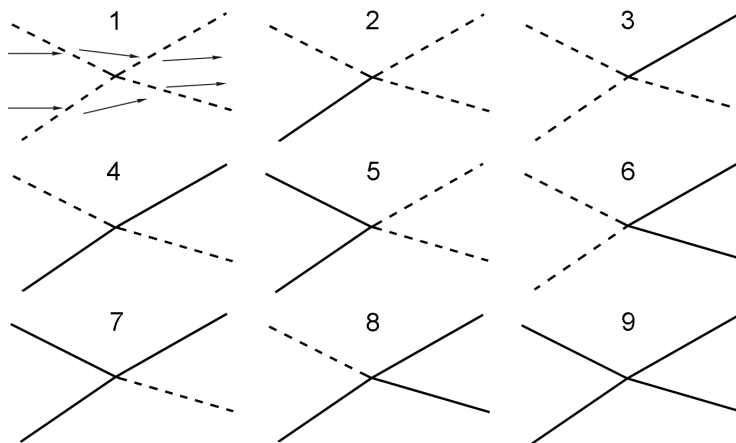


Рис. 3.4: Схемы возможных режимов регулярного взаимодействия ударных волн (сплошные линии) и волн с полной дисперсией (штриховые линии). Направление потока «эффективного газа» показано на первой схеме.

Основные выводы, полученные в результате проведенного параметрического исследования, можно сформулировать следующим образом: во-первых, с увеличением M_0 происходит переход от режима 1, при котором все взаимодействующие волны – волны с полной дисперсией, к режиму 9 взаимодействия обычных ударных волн, через несколько промежуточных стадий (2, 4, 7); во-вторых, области параметров, при которых одна или обе входящие волны являются волнами с полной дисперсией, а одна или обе исходящие – ударные волны (режимы 3, 6, 8), сравнительно малы и существуют только при достаточно больших углах φ_0, ψ_0 , так же, как и в симметричном случае. Это объясняется тем, что в случае взаимодействия скачков уплотнения, при котором угол между входящими скачками достаточно велик, отраженные волны более интенсивные, чем падающие, что может приводить к возникновению разрыва параметров несущей фазы в отраженных волнах, тогда в входящих волнах он отсутствует. Режимам 2, 4, 7, в которых только часть

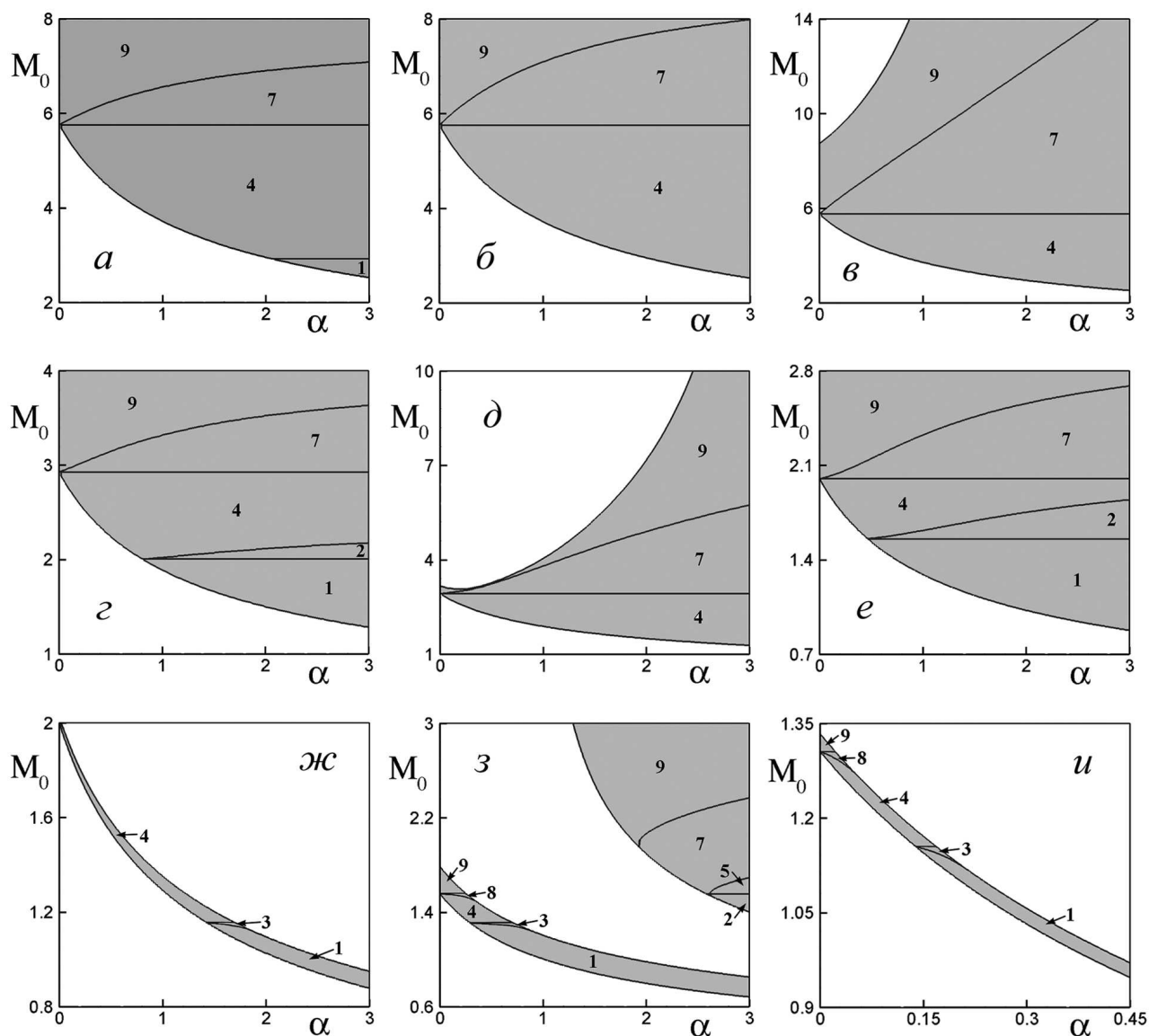


Рис. 3.5: Области параметров, соответствующих различным волновым конфигурациям (согласно схеме на рис. 3.4), для значений углов (φ_0, ψ_0) : а - $(10^\circ, 20^\circ)$, б - $(10^\circ, 30^\circ)$, в - $(10^\circ, 60^\circ)$, г - $(20^\circ, 30^\circ)$, д - $(20^\circ, 60^\circ)$, е - $(30^\circ, 40^\circ)$, ж - $(30^\circ, 60^\circ)$, з - $(40^\circ, 50^\circ)$, и - $(50^\circ, 60^\circ)$.

волн вырождается в волны с полной дисперсией, отвечают достаточно широкие диапазоны значений определяющих параметров, следовательно, вполне вероятно появление таких конфигураций в реальных течениях. Наконец, при определенном значении углов φ_0, ψ_0 области существования режимов могут становиться несвязными (рис. 3.5, з), что объясняется немонотонностью границы регулярного взаимодействия ударных волн.

3.2 Исследование локальной структуры течения запыленного газа в области взаимодействия волн в рамках двухскоростной модели

Перейдем к исследованию локальной структуры течения вблизи точки взаимодействия волн с полной дисперсией на масштабе длины скоростной релаксации, то есть при $\beta = 1$. Полная система уравнений газа и частиц (2.6)-(2.7) решалась численно методом установления на эйлеровой сетке с использованием явной схемы Мак-Кормака.

Для реализации метода необходимо систему (2.6)-(2.7) дополнить частными производными по времени и представить уравнения в дивергентной форме. Получившиеся уравнения удобно записать в векторном виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = D,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(\frac{1}{\gamma}T + \frac{(\gamma-1)}{2}M_0^2V^2) \\ n_s \\ n_s u_s \\ n_s v_s \\ n_s T_s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho(u^2 + \frac{1}{\gamma M_0^2}p) \\ \rho uv \\ \rho v(T + \frac{(\gamma-1)}{2}M_0^2V^2) \\ n_s u_s \\ n_s u_s^2 \\ n_s u_s v_s \\ n_s u_s T_s \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho(v^2 + \frac{1}{\gamma M_0^2}p) \\ \rho u(T + \frac{(\gamma-1)}{2}M_0^2V^2) \\ n_s v_s \\ n_s u_s v_s \\ n_s v_s^2 \\ n_s v_s T_s \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha\beta\mu n_s(u - u_s)C_f \\ -\alpha\beta\mu n_s(v - v_s)C_f \\ \left[-\alpha\beta\mu n_s(\gamma - 1)M_0^2\mathbf{V}_s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)C_f \right] \\ -\alpha\beta\frac{n_s}{3Pr}(T - T_s)C_q \\ 0 \\ \beta\mu n_s(u - u_s)C_f \\ \beta\mu n_s(v - v_s)C_f \\ \beta\frac{n_s}{3\chi Pr}(T - T_s)C_q \end{pmatrix}$$

Двухшаговая схема Мак-Кормака имеет следующий вид:

$$A_{i,j}^{n+1/2} = A_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(B_{i+1,j}^n - B_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n) + \Delta t D_{i,j}^n$$

$$A_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(A_{i,j}^n + A_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(B_{i,j}^{n+1/2} - B_{i-1,j}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(C_{i,j}^{n+1/2} - C_{i,j-1}^{n+1/2}) + \Delta t D_{i,j}^{n+1/2} \right)$$

Здесь Δt , Δx , Δy и n, i, j – шаги и индексы по времени t и координатам x, y соответственно.

Чтобы удостовериться в работоспособности метода, а также оценить характерную ширину возникающих областей неравновесного течения, вначале была рассчитана структура прямой волны с полной дисперсией. В расчетах методом установления начальная безразмерная толщина зоны неравновесного течения принималась равной единице, распределение параметров несущей фазы задавалось по синусоидальному закону с одной четвертью периода, а начальные параметры дисперсной фазы вычислялись с использованием полного лагранжева подхода [97]. Связь параметров до и после волны задавалась из условия выполнения соотношений Рэнкина-Гюгонио для «эффективного газа». В процессе нахождения установившегося решения, в качестве граничных условий на достаточно большом расстоянии вниз по потоку задавались параметры, соответствующие параметрам «эффективного газа» за ударной волной.

В результате расчетов получены характерные распределения параметров фаз «внутри» волны с полной дисперсией. На рис. 3.6, *a* приведено сравнение настоящих расчетов с результатами работы [105], в которой распределения параметров фаз получены интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений для одномерного течения газа с частицами. Видно, что ширина волны с полной дисперсией на порядок больше характерной длины релаксации скоростей фаз l_τ и, следовательно, много больше характерной ширины волны с частичной дисперсией.

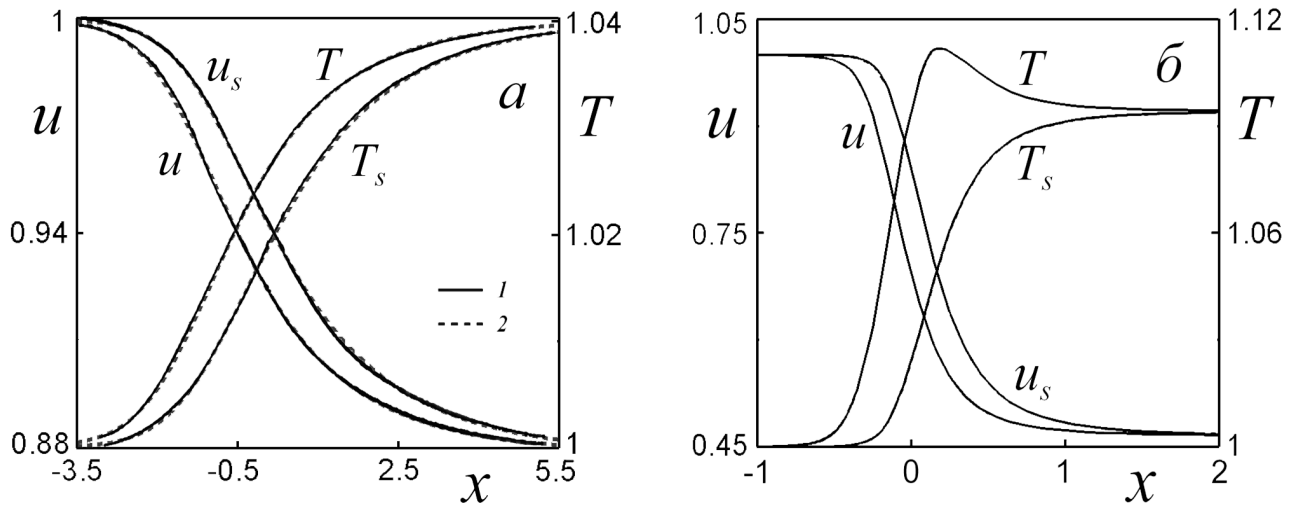


Рис. 3.6: Изменение скорости и температуры фаз в волне с полной дисперсией при: $M_0 = 0.95, \alpha = 0.2, \chi = 1.125, Re_{s0} = 225$ (а) (1 - результаты из [105], 2 - результаты настоящих расчетов); $M_0 = 0.95, \alpha = 1, \chi = 2, Re_{s0} = 500$ (б).

Параметрическое исследование структуры прямой волны с полной дисперсией позволило найти диапазон параметров, в котором температура несущей фазы имеет локальный максимум внутри волны (рис. 3.6, б). Возникновение локального максимума температуры можно объяснить наличием двух конкурирующих процессов в межфазном обмене энергией: первый связан с теплообменом фаз, а второй – с диссипацией механической энергии в тепловую за счет работы сил трения на относительном перемещении фаз. В зоне релаксации более холодные частицы отбирают тепло у газа за счет теплопроводности и, в то же время, нагревают его за счет работы сил межфазного трения.

Если теплоемкость вещества частиц превышает теплоемкость газа, то ширина зоны температурной релаксации превышает длину скоростной релаксации примерно в χ раз. При значениях определяющих параметров, соответствующих рис. 3.6, б, ширина волны значительно меньше, чем в первом рассмотренном случае. Это объясняется тем, что с увеличением массовой концентрации частиц волна становится более интенсивной, и параметры фаз внутри волны изменяются более резко.

Рассмотрим теперь структуру течения запыленного газа в области симметричного пересечения волн с полной дисперсией. В численных расчетах методом установления начальные распределения параметров внутри волн задавались аналогично случаю прямой волны. Начальное положение волн определялось согласно регулярному взаимодействию ударных волн в «эффективном газе». В качестве краевых условий на левой границе брались параметры невозмущенного равновесного течения смеси, на верхней и правой границе ставились мягкие граничные условия, на нижней границе – условие симметрии. Типичный пример расчета поля концентрации частиц для данного случая приведен на рис. 3.7, *a*. Поскольку, как показано в [124], за точкой взаимодействия обычных ударных волн траектории инерционных частиц могут пересекаться, для выяснения возможности пересечения траекторий были проведены расчеты движения частиц с использованием лагранжева подхода [97]. Расчеты показали, что ввиду малой интенсивности взаимодействующих волн траектории частиц слабо отклоняются от горизонтальных линий, поэтому пересечения траекторий частиц не происходит (рис. 3.9, *a*). Таким образом, применение эйлерова подхода для расчета параметров дисперсной фазы вполне правомерно. Для сравнения параметров несущей и дисперсной фазы в зонах неравновесного течения на рис. 3.8, *a*, *б* представлены графики распределения давления и продольных скоростей фаз по координате x в трех различных сечениях ($y = 0$, $y = 4$, $y = 8$).

Наряду со случаем двух взаимодействующих волн с полной дисперсией было рассчитано течение, в котором приходящие волны являются волнами с частичной дисперсией, а отраженные – с полной дисперсией. Метод расчета аналогичен предыдущему, однако в данном случае левая граница расчетной области была совмещена с фронтами приходящих ударных волн. Параметры несущей фазы на этой границе определялись из соотношений Рэнкина-Гюгонио для косых скачков уплотнения в чистом газе; полагалось, что параметры частиц совпадают с равновесными значениями параметров до ударной волны.

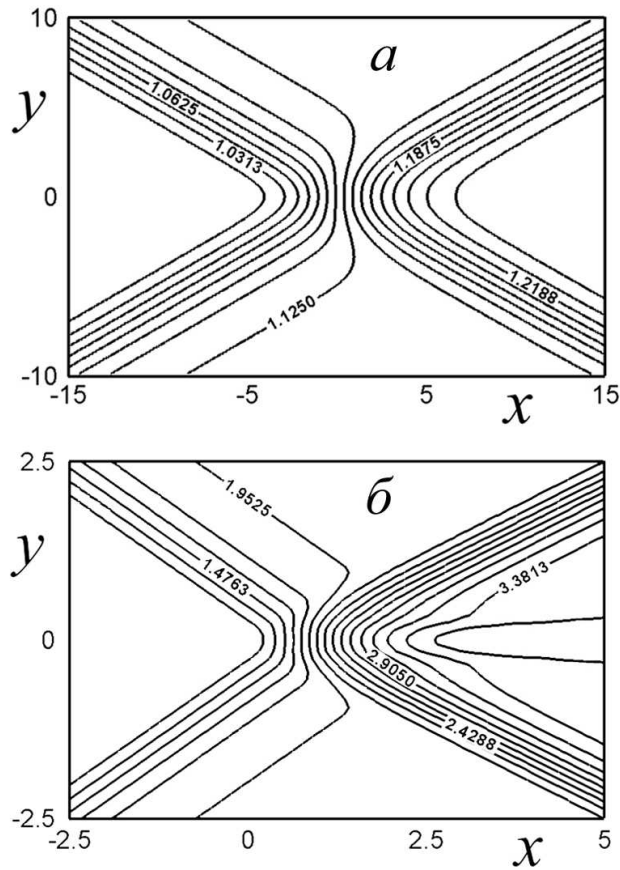


Рис. 3.7: Изолинии числовой концентрации частиц вблизи точки взаимодействия волн, при котором волнами с полной дисперсией являются: и падающие, и отраженные волны (а) $M_0 = 1.8, \varphi_0 = 30^\circ, \alpha = 0.3, \chi = 1, Re_{s0} = 100$; только отраженные волны (б) $M_0 = 1.77, \varphi_0 = 35^\circ, \alpha = 1, \chi = 1, Re_{s0} = 100$.

Изолинии числовой концентрации частиц и распределение параметров фаз по координате x , полученные в результате расчетов, приведены на рис. 3.7, б и 3.8, в, г соответственно. Заметим, что масштабы диаграмм для двух рассмотренных режимов различны, поэтому в последнем случае ширина зон, в которых изменяются параметры газа и частиц, значительно меньше, чем в случае, когда все взаимодействующие волны – волны с полной дисперсией. Также для случая приходящих волн с частичной дисперсией заметно увеличение концентрации частиц справа от точки взаимодействия волн (рис. 3.7, б), то есть в области за отраженными скачками вблизи плоскости симметрии поток становится существенно неоднородным. Однако пересечения траекто-

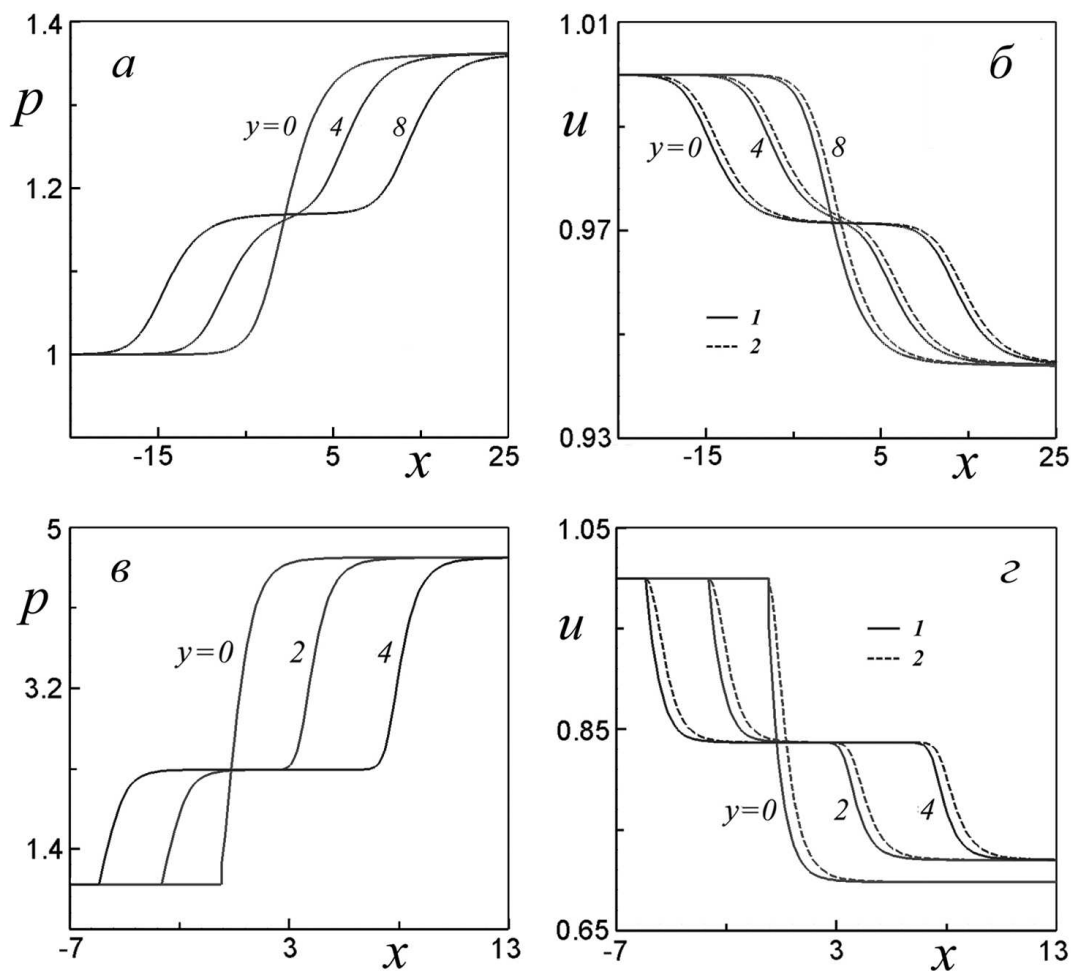


Рис. 3.8: Распределение давления газа и продольных компонент скоростей обеих фаз по координате x при: $M_0 = 1.8, \varphi_0 = 30^\circ, \alpha = 0.3, \chi = 1, Re_{s0} = 100$ (а, б); $M_0 = 1.77, \varphi_0 = 35^\circ, \alpha = 1, \chi = 1, Re_{s0} = 100$ (в, г) (1 – параметры газа, 2 – параметры частиц).

рий частиц и в этом случае не происходит (3.9, б). На рис. 3.8, г хорошо видно снижение равновесного значения скорости на оси симметрии за точкой взаимодействия по сравнению с равновесной скоростью вдали от оси. Более подробно распределение равновесного значения параметров (продольной скорости газа и концентрации частиц) по координате y показано на рис. 3.10.

Формирование области с повышенным значением концентрации в окрестности плоскости симметрии показывает, что в некоторых локальных зонах модель «эффективного газа» неприменима даже на больших расстояниях от точки взаимодействия скачков.

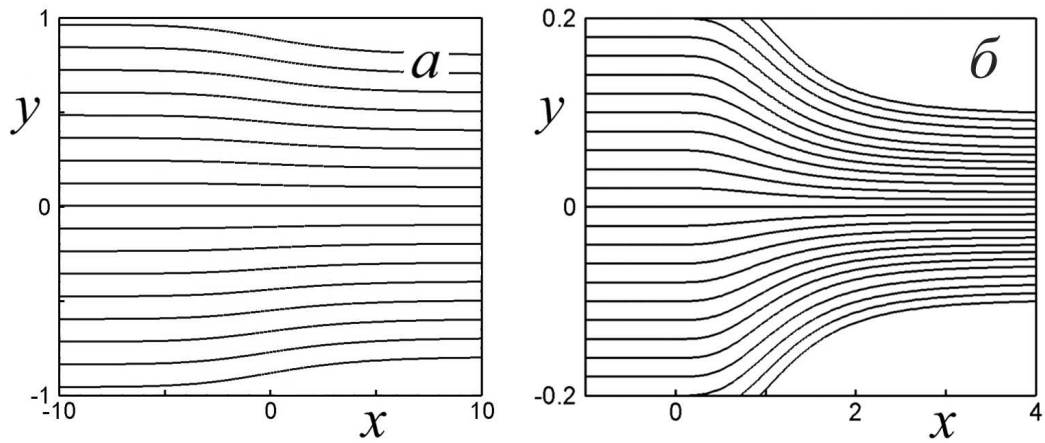


Рис. 3.9: Траектории частиц в случаях, когда волнами с полной дисперсией являются: все взаимодействующие волны (а), только отраженные волны (б)

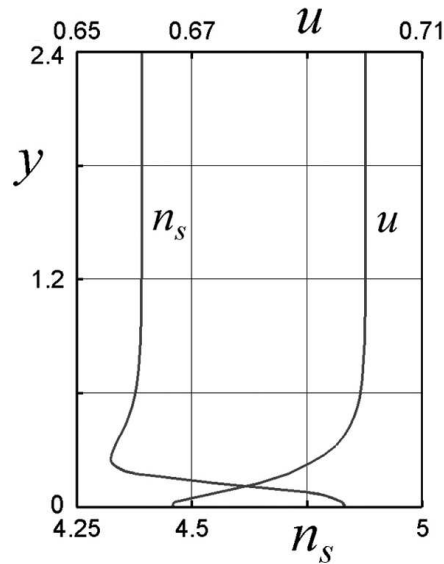


Рис. 3.10: Распределение равновесного значения продольной компоненты скорости газа и числовой концентрации частиц по координате y вдали за точкой взаимодействия волн при $M_0 = 1.77$, $\varphi_0 = 35^\circ$, $\alpha = 1$, $\chi = 1$, $Re_{s0} = 100$.

Выводы

В данной главе рассмотрена задача о симметричном и несимметричном взаимодействии плоских ударных волн в стационарном потоке запыленного газа при конечной массовой концентрации частиц. С использованием модели «эффективного газа» показано, что существуют диапазоны безразмерных определяющих параметров (числа Маха, углов между входящими волнами и

набегающим потоком, отношения теплоемкостей фаз и массовой концентрации частиц), соответствующие волновым конфигурациям, в которых либо все волны, либо только некоторые из взаимодействующих волн вырождаются в волны с полной дисперсией.

В рамках двухконтинуальной модели запыленного газа методом Мак-Кормака рассчитана структура течения в области симметричного взаимодействия скачков для типичных волновых конфигураций, включающих волны с полной дисперсией. Показано, что зоны неравновесного течения заметно превосходят характерную длину скоростной релаксации частиц (особенно при небольших концентрациях дисперсной фазы), поэтому рассогласование скоростей и температур фаз, как правило, невелико, и пересечения траекторий частиц за точкой взаимодействия волн с полной дисперсией не происходит. Численное параметрическое исследование структуры прямой волны с полной дисперсией в запыленном газе показало, что с увеличением массовой концентрации частиц ширина области неравновесного течения резко уменьшается. Обнаружен диапазон параметров, в котором внутри структуры волны с полной дисперсией температура несущей фазы имеет локальный максимум.

Результаты, представленные в этой главе, изложены в работах [125, 129, 131, 135, 142].

Глава 4. Взаимодействие ударных волн в газе с грубодисперсной примесью. Эффект аэродинамической фокусировки частиц.

4.1 Расчет параметров несущей фазы

В данной главе исследуется стационарное течение запыленного газа в области взаимодействия плоских скачков уплотнения и анализируются условия возникновения эффекта аэродинамической фокусировки частиц. Рассматривается регулярное (симметричное и несимметричное) и маховское взаимодействие скачков, с прямой маховской «ножкой» (см. рис. 4.1). Предполагается, что массовая доля частиц мала и они не оказывают влияния на несущую фазу.

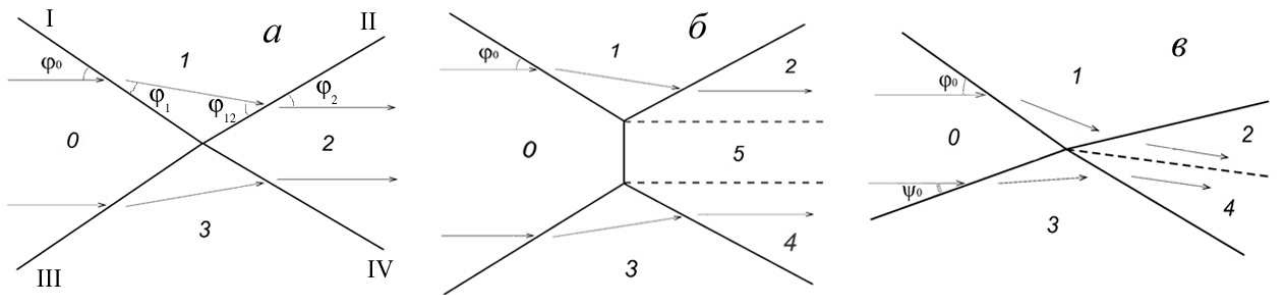


Рис. 4.1: Режимы взаимодействия плоских ударных волн: симметричное регулярное (а), симметричное маховское (б), несимметричное регулярное (в).

Будем рассматривать течение в небольшой окрестности точки взаимодействия, так, чтобы газодинамические разрывы можно было считать плоскими, а все течение зависело только от двух координат x, y . Так как поток до приходящих волн однородный и его свойства известны, то параметры газа в каждой из областей, разделенных газодинамическими разрывами, постоянны

и могут быть вычислены с использованием соотношений Рэнкина-Гюгонио:

$$\begin{aligned}
 [V^* \cos \varphi_0] &= 0 \\
 [V^* \rho^* \sin \varphi_0] &= 0 \\
 [p^* + \rho^* V^{*2} \sin^2 \varphi_0] &= 0 \\
 h + \frac{V^{*2}}{2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь квадратные скобки означают разность величины до и после ударной волны, φ_0 – угол между потоком и ударной волной, причем $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$.

Энтальпия и уравнение состояния совершенного газа имеют вид:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*} \\
 p^* &= \rho^* RT^*
 \end{aligned}$$

Полагается, что показатель адиабаты постоянный и равен 1.4.

Используя в качестве характерных масштабов параметры потока в области θ , соотношения Рэнкина-Гюгонио в безразмерном виде для ударной волны I можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}, \quad V_1 \rho_1 = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1}, \quad \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{M_0^2}{M_1^2} V_1^2 \\
 p_1 &= \frac{1 + \gamma M_0^2 \sin^2 \varphi_0}{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \varphi_1}, \quad V_1^2 = \frac{2/M_0^2 + \gamma - 1}{2/M_1^2 + \gamma - 1},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь индексами θ и 1 обозначены параметры в соответствующей области. Для ударной волны III соотношения (4.2) принимают идентичную форму, если значение индекса 1 изменить на 3 и угол φ заменить на ψ . Вычислив из (4.2) параметры газа в областях 1 и 3, можно найти параметры в областях 2 и 4. Таким образом, параметрами, определяющими течение чистого газа, являются число Маха невозмущенного потока M_0 и углы φ_0 , ψ_0 между набегающим потоком и проходящими волнами (показатель адиабаты имеет постоянное значение $\gamma = 1.4$).

Безразмерные параметры газа в области 1 могут быть выражены через определяющие параметры M_0 , φ_0 аналитически:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{2(1 + \tau_0^2) + M_0^2 \tau_0^2 (\gamma - 1)}{M_0^2 \tau_0 (\gamma + 1)}, \quad \text{где } \tau_i = \operatorname{tg} \varphi_i, \quad i = 0, 1 \\
V_1^2 &= \left(\frac{2 + M_0^2 \sin^2 \varphi_0 (\gamma - 1)}{M_0^2 \sin \varphi_0 (\gamma + 1)} \right)^2 + \cos^2 \varphi_0 \\
p_1 &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_0^2 \sin^2 \varphi_0 - 1) \\
\rho_1 &= \frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{M_0^2 \tau_0^2 (\gamma + 1)}{2(1 + \tau_0^2) + M_0^2 \tau_0^2 (\gamma - 1)} \\
M_1^2 &= \frac{2 + M_0^2 (\gamma - 1)}{2\gamma M_0^2 \sin^2 \varphi_0 - (\gamma - 1)} + \frac{2M_0^2 \cos^2 \varphi_0}{2 + M_0^2 \sin^2 \varphi_0 (\gamma - 1)}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Аналогично параметры в области 3 выражаются через M_0 , ψ_0 .

В случае симметричного взаимодействия ударных волн параметры газа за отраженными ударными волнами (области 2 и 4) вычисляются также аналитически. Выражения для определения параметров в области (2) довольно громоздки, приводить их в явном виде как функции параметров M_0 , φ_0 , γ не имеет смысла, поэтому ограничимся кратким описанием алгоритма их нахождения [1].

Используя соотношения (4.2) для волн I и II, а также очевидное геометрическое условие

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_{12} - \varphi_2, \tag{4.4}$$

получим квадратное уравнение

$$A\tau_2^2 + B\tau_2 + C = 0 \tag{4.5}$$

с коэффициентами, зависящими от определяющих параметров:

$$A = \frac{(\gamma + 1)\varepsilon}{\sin^2 \varphi_0}$$

$$B = 2 \operatorname{ctg} \varphi_0 ((\varepsilon^2 - 1) \operatorname{ctg} \varphi_0 - 2\varepsilon)$$

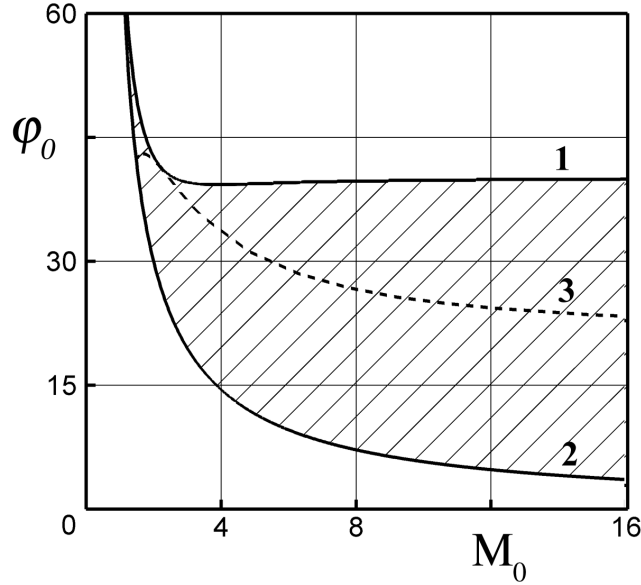


Рис. 4.2: Области существования регулярного и маховского стационарного отражений

$$C = (\gamma - 3)\varepsilon \operatorname{ctg}^2 \varphi_0 - 2(\varepsilon^2 - 1) \operatorname{ctg} \varphi_0 + (\gamma + 1)\varepsilon$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi_1) = \frac{2}{\tau_0} \frac{1 + \tau_0^2(1 + M_0^2)}{2 + \tau_0^2(2 + M_0^2(\gamma - 1)) + M_0^2(\gamma + 1)}$$

Угол φ_2 определяется как решение уравнения (4.5). Зная величину угла φ_2 и пользуясь соотношением (4.4), находим угол φ_{12} , а затем и все остальные параметры газа в области (2).

Неравенство $B^2 - AC \geq 0$ выражает условие существования решения уравнения (4.5), то есть определяет значения параметров, при которых возможно регулярное взаимодействие. На рис. 4.2 в плоскости параметров M_0, φ_0 кривая 1 соответствует уравнению $B^2 - AC = 0$, а кривая 2 – условию $M_0 \sin \varphi_0 = 1$. Для каждой точки заштрихованной области, ограниченной кривыми 1 и 2, существует регулярное взаимодействие волн.

Для анализа существования так называемого «стационарного» маховского взаимодействия – нерегулярного взаимодействия ударных волн с прямой маховской «ножкой» (см. рис. 4.1, б) – к уравнениям (4.2) добавляются соотношения Рэнкина-Гюгонио на прямом скачке уплотнения (маховской «ножке») и условие равенства давлений на тангенциальном разрыве. В результате

некоторых преобразований все перечисленные условия можно свести к квадратному уравнению относительно τ_0^2 [1]:

$$D\tau_0^4 + E\tau_0^2 + F = 0 \quad (4.6)$$

$$D = \frac{\gamma p_1(1 + \kappa p_1)}{p_1 + \kappa}, \quad E = \frac{\gamma \kappa p_1(1 + \kappa p_1) + (p_1 - 1)^2}{1 + \kappa p_1}, \quad F = -(p_1 + \kappa)$$

Здесь $\kappa = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Решение уравнения (4.6) позволяет найти значения параметров в областях (1), (2), (5). Геометрическое место точек в плоскости параметров M_0, φ_0 , отвечающее «стационарному» маховскому взаимодействию, представляет собой кривую 3 на рис. 4.2. Эта кривая полностью попадает в заштрихованную область, следовательно, в каждой точке кривой 3 возможно как регулярное, так и маховское «стационарное» взаимодействие волн. Какое именно из взаимодействий реализуется и какова высота маховской ножки зависит от ряда причин, не принимаемых во внимание в данной работе, например, от вида и положения источника ударных волн или от предыстории течения.

Перейдем к рассмотрению несимметричного взаимодействия ударных волн. В этом случае газодинамические параметры за исходящими волнами невозможно аналитически выразить через определяющие параметры. Опишем кратко один из способов вычисления параметров газа при несимметричном взаимодействии волн. Поскольку области 2 и 4 разделены тангенциальным разрывом, то $p_2 = p_4$. К соотношениям Рэнкина-Гюгонио следует также добавить геометрическое условие:

$$\varphi_0 + \psi_0 - \varphi_1 - \psi_1 - \varphi_{12} - \psi_{12} + \varphi_2 + \psi_2 = 0 \quad (4.7)$$

Значения углов φ_1, ψ_1 вычисляются по формулам (4.3), а остальные неизвестные углы можно выразить через величину p_2 и известные параметры в областях 0, 1 и 3:

$$\varphi_{12} = \arcsin\left(\sqrt{S_1}\right), \quad \varphi_2 = \arctg\left(\sqrt{\frac{S_1}{1 - S_1} \frac{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}}\right),$$

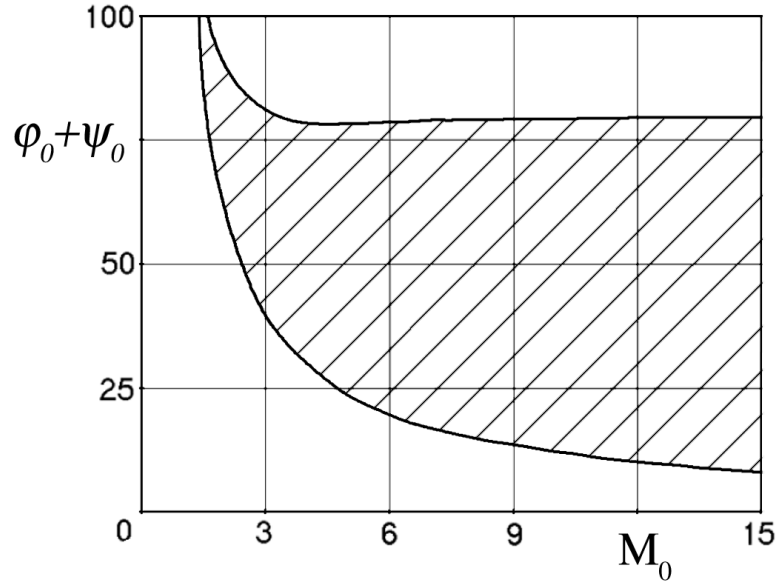


Рис. 4.3: Критерий существования регулярного взаимодействия для несимметричного случая

$$\psi_{12} = \arcsin\left(\sqrt{S_3}\right), \quad \psi_2 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{S_3}{1-S_3}} \frac{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_3}{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_3}\right), \quad (4.8)$$

$$\text{где } S_i = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_i}{2\gamma M_i p_i}, \quad i = 1, 3$$

Подставляя выражения для углов (4.8) в соотношение (4.7), получим уравнение с одной неизвестной p_2 . Уравнение это решается численно стандартным итерационным методом. В случаях, когда существует два решения, используется то, которое соответствует более слабым отраженным волнам. Таким образом, найдя значение давления за отраженными волнами p_2 , можно вычислить значения углов и других неизвестных параметров.

Также численно определяются значения параметров M_0, φ_0, ψ_0 , при которых существует решение уравнения (4.7). Объединение всех наборов параметров M_0, φ_0, ψ_0 , для которых возможно регулярное взаимодействие ударных волн представлено на рис. 4.3 в виде заштрихованной области в плоскости параметров $M_0, (\varphi_0 + \psi_0)$.

4.2 Расчет параметров дисперсной фазы с применением полного лагранжева подхода

Перейдем к изучению характера движения дисперсной фазы. Предполагается, что в области θ направление движения, скорость и температура обеих фаз одинаковы, а частицы распределены равномерно с концентрацией n_{s0} . В качестве силы межфазного взаимодействия используется сила аэродинамического сопротивления в форме (2.4), а динамическая вязкость газа вычисляется по степенному закону $\mu = T^{0.76}$. Другие предположения касательно среды частиц перечислены в разделе 2.1. Таким образом, уравнения, описывающие течение дисперсной фазы, могут быть взяты в форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{V}_s) &= 0 \\ (\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s &= \beta \mu (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) C_f \\ (\mathbf{V} \nabla) T_s &= \frac{2}{3} \frac{\beta}{\chi Pr} \lambda (T - T_s) C_q \end{aligned} \quad (4.9)$$

При наличии в поле течения несущей фазы особенностей, в данном случае сильных разрывов, высока вероятность возникновения пересекающихся траекторий частиц, то есть поля параметров дисперсной фазы могут становиться в локальных точках или областях неоднозначными, поэтому для расчета параметров частиц применяется полный лагранжев подход, изложенный в разделе 2.2. В качестве лагранжевых переменных используется координата начала траектории y_0 на падающей ударной волне и время движения вдоль траектории t . В данной задаче отсутствует какой-либо характерный масштаб расстояния, поэтому параметр инерционности β в уравнениях (2.11)-(2.13) положим равным единице (то есть в качестве характерной длины используется длина скоростной релаксации при законе сопротивления Стокса). Уравнения, описывающие движение частиц, при фиксированном значении y_0 имеют вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s$$

$$\begin{aligned}\frac{du_s}{dt} &= \mu(u - u_s) \cdot C_f(M_s, Re_s) \\ \frac{dv_s}{dt} &= \mu(v - v_s) \cdot C_f(M_s, Re_s)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Поскольку в каждой из областей, разделенных сильными разрывами, параметры газа постоянны, то можно упростить систему уравнений (2.13) и записать ее в виде:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= g, \quad \frac{df}{dt} = h \\ \frac{dg}{dt} &= -\mu g \cdot C_f(M_s, Re_s) + \mu(u - u_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0} \\ \frac{dh}{dt} &= -\mu h \cdot C_f(M_s, Re_s) + \mu(v - v_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Для подсчета числовой концентрации частиц используется формула, полученная из уравнения неразрывности, записанного в лагранжевой форме (2.12):

$$n_s = \frac{1}{|v_s e - u_s f|}\quad (4.12)$$

Приведенная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.10)-(4.11) решается для выбранных значений y_0 с постоянными значениями параметров u, v, μ в каждой области. Опишем подробнее процедуру расчета параметров частиц.

Фиксируется значение y_0 и решаются уравнения в области 1 с соответствующими значениями параметров u, v, μ и начальными условиями на падающей ударной волне:

$$x_s = -y_0 \operatorname{ctg} \varphi_0, \quad y_s = y_0, \quad u_s = 1, \quad v_s = 0,$$

$$e = -\operatorname{ctg} \varphi_0, \quad f = 1, \quad g = 0, \quad h = 0$$

В момент, когда траектория частицы пересекла отраженную волну, необходимо начать решение системы (4.10)-(4.11) с новыми параметрами u, v, μ из области 2. Однако было бы некорректно в качестве новых начальных условий

использовать значения функций e, f, g, h , полученные из предыдущих расчетов, поскольку частные производные по y_0 вычисляются при $t = const$, а лагранжева координата t индивидуальна для каждой отдельной траектории (это означает, что частицы, стартующие одновременно с падающей ударной волны, приходят к отраженной волне в разные моменты времени). Поэтому сначала рассчитываются все траектории в области 1, а затем лагранжевы координаты для каждой траектории меняются: y_0 фиксируется заново как ордината точки пересечения соответствующей траектории с отраженной ударной волной, t принимается равным нулю. В качестве начальных условий для u_s, v_s используются значения из области 1, поскольку скорость частиц непрерывна, начальные значения g, h определяются численным дифференцированием скоростей частиц по новому значению y_0 , а для остальных функций:

$$x_s = y_0 \operatorname{ctg} \varphi_2, \quad y_s = y_0, \quad e = \operatorname{ctg} \varphi_2, \quad f = 1$$

Поскольку меняются лагранжевы координаты, то соотношение для вычисления концентрации, имеющее в области 1 вид (4.12), в области 2 принимает форму:

$$n_s = \frac{n_s^0 |J^0|}{|v_s e - u_s f|} \quad (4.13)$$

Здесь n_s^0 – значение концентрации на отраженной волне, J^0 – значение якобиана перехода от эйлеровых координат к новым лагранжевым координатам.

В других областях процедура нахождения параметров фаз выполняется аналогичным образом.

Система ОДУ (4.10)-(4.11) решается численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка, что позволяет найти дискретные траектории частиц для выбранных значений y_0 и распределение скоростей и концентрации частиц вдоль траекторий.

На рис. 4.4, а представлена картина движения частиц в случае симметричного взаимодействия ударных волн при $M_0 = 5, \operatorname{Re}_{s0} = 100, \varphi_0 = 30^\circ$.

Видно, что за отраженной ударной волной возникает пересечение траекторий частиц. Выше оси x траектории частиц, берущих начало в верхней полуплоскости, между собой не пересекаются, однако ниже оси x существует область неоднозначности, в каждую точку которой приходит две траектории из верхней полуплоскости. Более детально эта область представлена на рис. 4.5, где изображены только те траектории, для которых начальная координата $y_0 > 0$. Снизу область пересекающихся траекторий ограничена огибающей линией, а сверху - осью x .

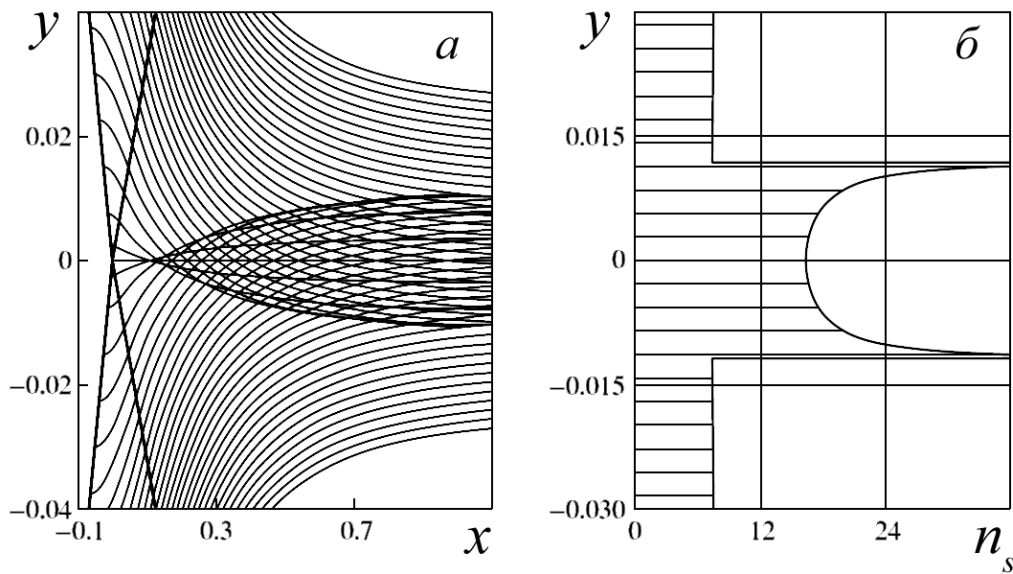


Рис. 4.4: Траектории и профиль концентрации частиц в сечении $x = 5$ при $M_0 = 5$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re_{s0} = 100$

Таким образом, если рассматриваются частицы из обеих полуплоскостей, то пересечения траекторий происходят в узкой симметричной области вблизи оси x , ограниченной двумя огибающими, и в каждую точку этой области приходят три различные траектории.

Подобная картина распределения траекторий характерна для большинства значений параметров M_0 , φ_0 , Re_0 , хотя существуют наборы параметров, при которых ни одна траектория не пересекает оси x и области неоднозначности не возникает. Как правило, это происходит при взаимодействии ударных

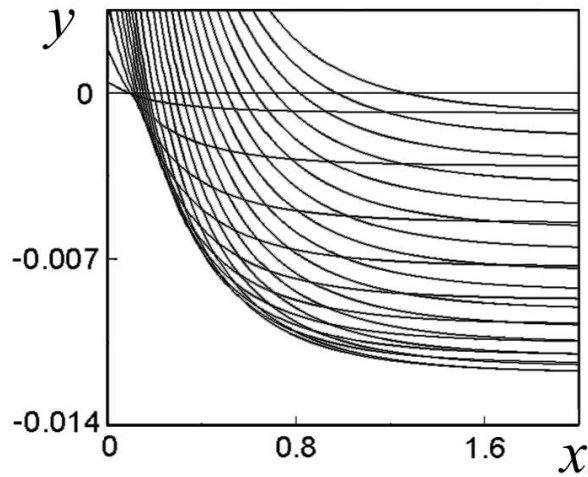


Рис. 4.5: Область пересечения траекторий частиц при $M_0 = 5$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re_{s0} = 100$

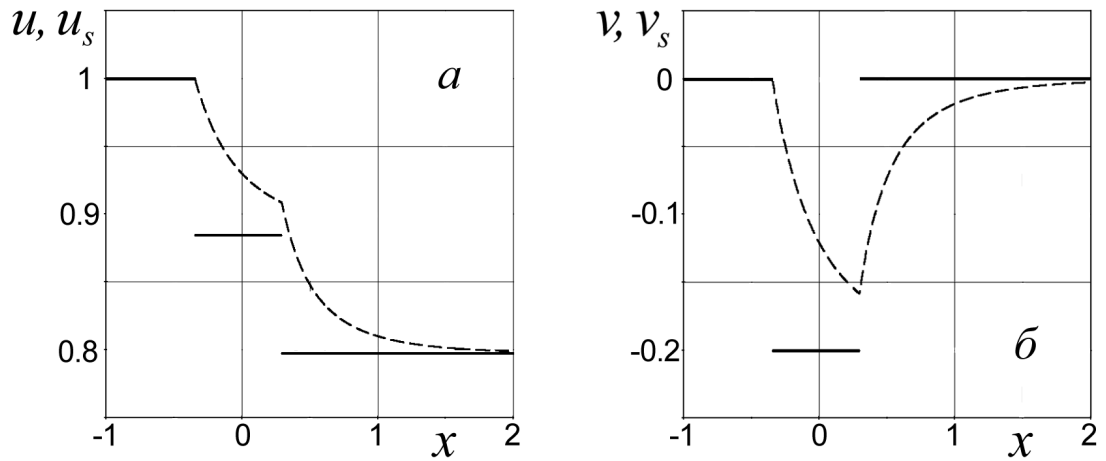


Рис. 4.6: Изменение продольной (а) и вертикальной (б) компонент скорости газа (сплошные линии) и частиц (пунктирные линии) с начальной координатой $y_0 = 0.1$ при $M_0 = 5$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re_{s0} = 100$

волн слабой интенсивности либо при малых значениях числа Рейнольдса, что будет показано далее.

На рис. 4.6 показано характерное изменение компонент скорости газа и частиц вдоль траектории с начальной координатой $y_0 = 0.1$. Скорость несущей фазы, постоянная в каждой области и имеющая разрывы на скачках уплотнения, изображена сплошными линиями, скорость частицы - пунктирными. Видно, что за отраженной ударной волной релаксация частицы в газе происходит довольно быстро.

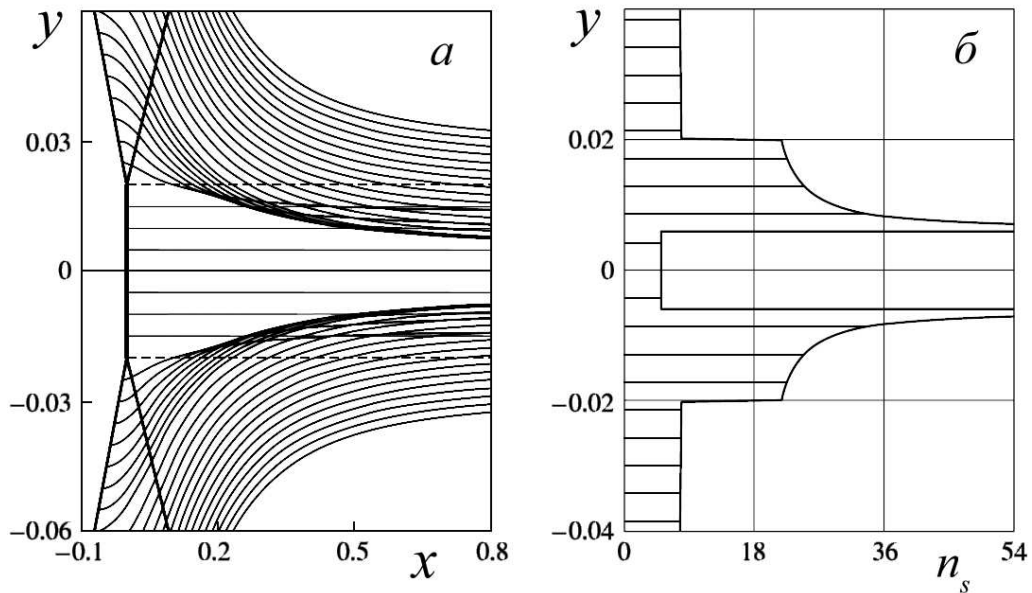


Рис. 4.7: Траектории и профиль концентрации частиц при маховском взаимодействии: $M_0 = 5.39$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re_{s0} = 100$

На рис. 4.4, б представлена зависимость концентрации частиц от координаты y в сечении $x = 5$, где $|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s| < 10^{-4}$, и далее профиль концентрации практически не меняется. Если в некоторую точку приходит более одной траектории, то величина концентрации в данной точке подсчитывается как сумма концентраций на всех траекториях, проходящих через эту точку. В области неоднозначности суммарная концентрация значительно возрастает и в крайних ее точках обращается в бесконечность. Данная особенность числовой концентрации частиц относится к интегрируемому типу, поскольку конечный объем дисперсной фазы «схлопывается» не в точку, а в элемент плоскости с конечной площадью. Как показано в работе [27], в таких случаях среднее расстояние между частицами остается конечным, и для типичных значений объемной концентрации ($\lesssim 10^{-5}$) и размеров частиц ($\lesssim 10$ мкм) модель невзаимодействующих частиц остается применимой.

Для маховского стационарного взаимодействия ударных волн картина движения частиц в областях 1 и 2 не отличается от соответствующего случая регулярного взаимодействия. В области 5, отделенной от области 2 тангенциальным разрывом, добавляются траектории частиц, параллельные оси x (см.

рис. 4.7, *а*), и также существует область неоднозначности, состоящая из трех слоев дисперсной фазы. Профиль числовой концентрации частиц для маховского режима взаимодействия представлен на рис. 4.7, *б*. На границах зоны пересечения траекторий концентрация имеет интегрируемую особенность, а на тангенциальном разрыве изменяется скачком.

Рассмотрим результаты, полученные численным интегрированием уравнений (4.10)-(4.11) для несимметричного взаимодействия ударных волн. Так же, как и в симметричном случае, возможны конфигурации, когда пересечения траекторий частиц не происходит, и конфигурации с пересечением траекторий, как, например, на рис. 4.8. Отличие состоит в том, что в симметричном случае в каждой точке области неоднозначности пересекаются ровно три траектории, тогда как в несимметричном возможны различные конфигурации. В зависимости от определяющих параметров область неоднозначности может состоять из нескольких частей, в каждой из которых пересекаются от двух (если в каждую точку приходит по одной траектории из верхней и нижней полуплоскости) до четырех (если в каждую точку приходит по две траектории из каждой полуплоскости) траекторий. Тангенциальный разрыв может лежать как внутри, так вне области неоднозначности.

На рис. 4.8, *а* представлена картина движения частиц при $M_0 = 8$, $Re_0 = 500$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$, когда пересекаются траектории из разных полуплоскостей, а также пересекаются между собой траектории из каждой полуплоскости. На рис. 4.8, *б* показано распределение концентрации частиц для этого случая в зависимости от расстояния до тангенциального разрыва, которое обозначено символом y_{tr} , в сечении, перпендикулярном тангенциальному разрыву и отстоящему от начала координат на расстоянии $x_{tr} = 4$. Концентрация стремится к бесконечности на границах области неоднозначности, а на тангенциальном разрыве имеет локальный максимум.

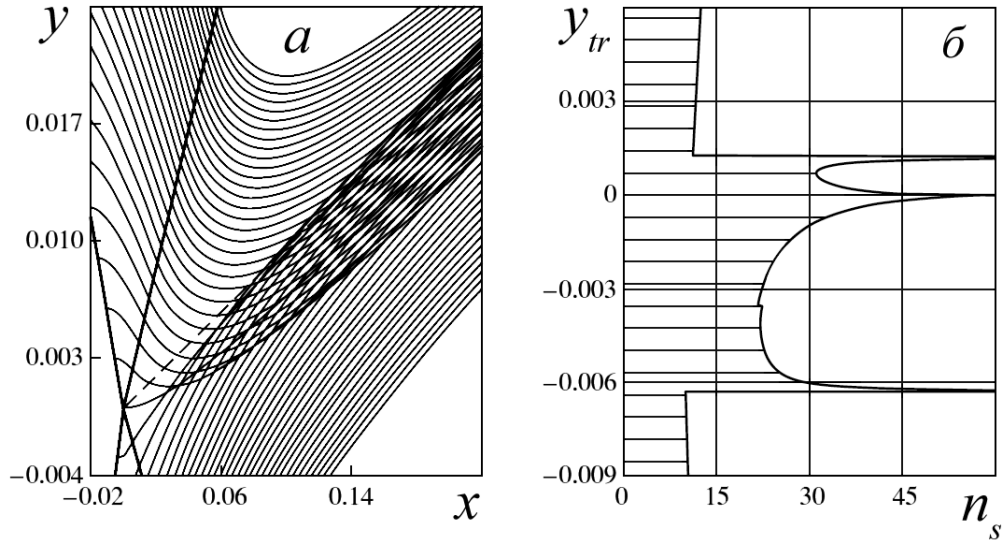


Рис. 4.8: Траектории и профиль концентрации частиц при несимметричном взаимодействии: $M_0 = 8$, $Re_0 = 500$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$

4.3 Параметрическое исследование эффекта фокусировки частиц

Перейдем к исследованию зависимости характера фокусировки частиц за точкой взаимодействия волн от определяющих параметров M_0 , φ_0 , ψ_0 , Re_{s_0} . Обозначим за $2d$ ширину области неоднозначности и назовем степень сжатия среды частиц или параметром фокусировки отношение максимального значения начальной координаты D , такой, что траектория, соответствующая ей, еще попадает в область неоднозначности, к половине ширины этой области: $\delta = D/d$ (см. рис. 4.9).

Вследствие того, что все частицы, проходящие через начальное сечение, проходят и через конечное, поток массы дисперсной фазы, равный $2DV_0^*mn_{s_0}$, не меняется. Поток импульса через конечное сечение I_d меньше, чем первоначальный поток импульса I_D , поскольку справедливы соотношения:

$$I_D = 2 \int_0^D mn_{s_0} V_0^{*2} dy = 2DV_0^{*2}mn_{s_0}$$

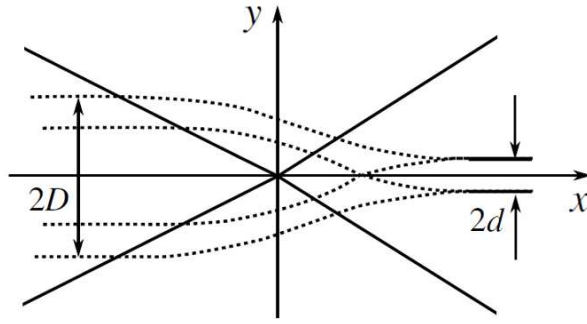


Рис. 4.9: Схема аэродинамической фокусировки частиц

$$I_d = 2 \int_0^d mn_s V_2^{*2} dy = V_2^* \cdot 2DV_0^* mn_{s_0} = I_D \frac{V_2^*}{V_0^*}$$

$$\frac{I_d}{I_D} = V_2 < 1$$

Таким образом, в процессе релаксации частиц в более медленном потоке газа часть импульса дисперсной фазы теряется. Однако локально поток импульса через элементарную площадь поперечного сечения струи достигает довольно больших значений, особенно в тех точках, где значение концентрации имеет локальный максимум. Среднее значение импульса, приходящееся на единицу длины в конечном сечении, также возрастает и прямо пропорционально зависит от отношения $D/d = \delta$.

Зависимости ширины области пересечения частиц d и параметра фокусировки частиц δ от начального числа Маха при фиксированных значениях $Re_{s_0} = 100$ и $\varphi_0 = 30^\circ$ представлены на рис. 4.10. Видно, что при малых числах Маха $d = 0$, то есть пересечения траекторий не возникает. Затем, при увеличении M_0 , d также растет и имеет локальный максимум при $M_0 \approx 6$. Величина δ возрастает при $M_0 \rightarrow \infty$ и при уменьшении M_0 , когда $d \rightarrow 0$. Таким образом, наибольшее сжатие среды в область конечной ширины происходит при больших значениях числа Маха, то есть когда взаимодействуют ударные волны большой интенсивности.

На рис. 4.11 показана зависимость величин d и δ от числа Рейнольдса обтекания частиц при фиксированных значениях $M_0 = 5$ и $\varphi_0 = 30^\circ$. При

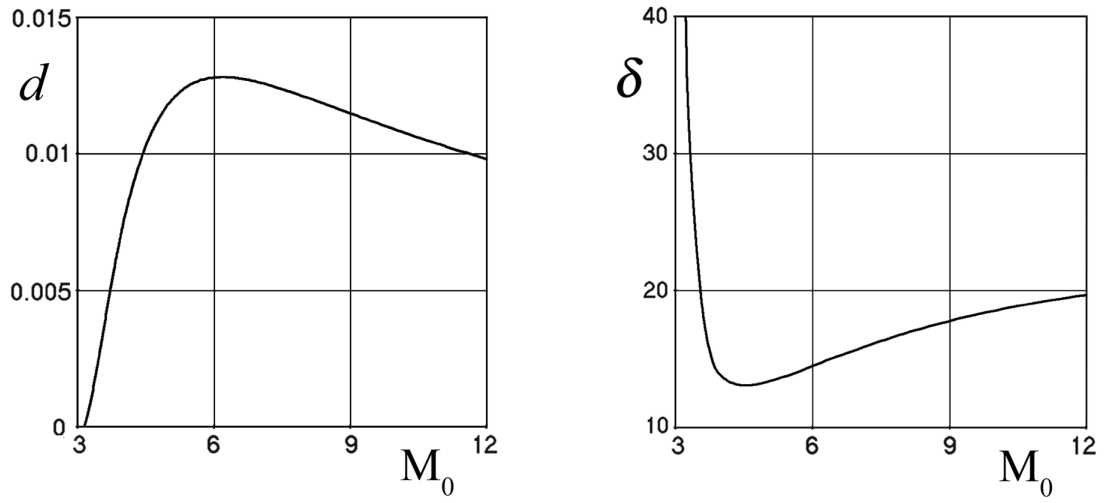


Рис. 4.10: Зависимость безразмерной ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Маха при $Re_{s0} = 100$, $\varphi_0 = 30^\circ$

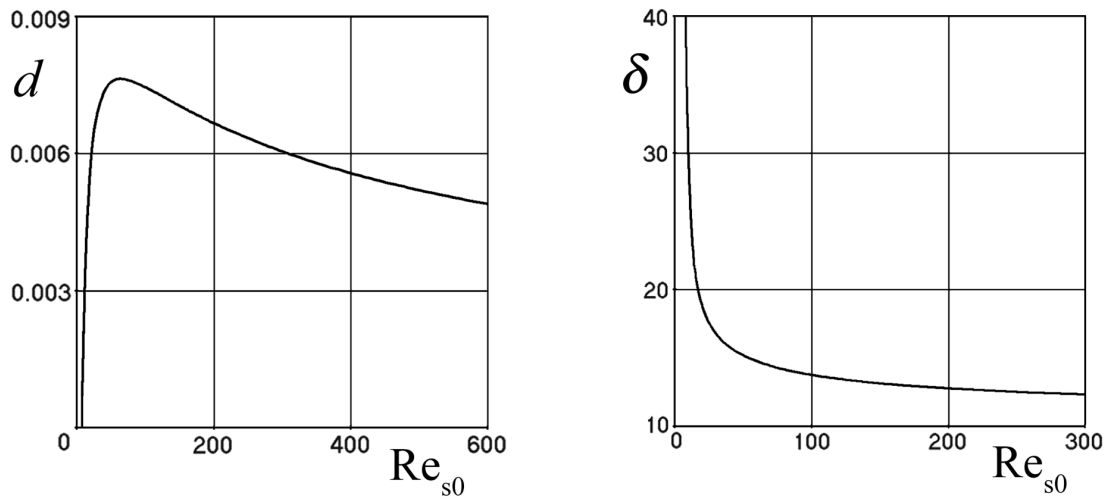


Рис. 4.11: Зависимость безразмерной ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Рейнольдса обтекания частиц при $M_0 = 5$, $\varphi_0 = 30^\circ$

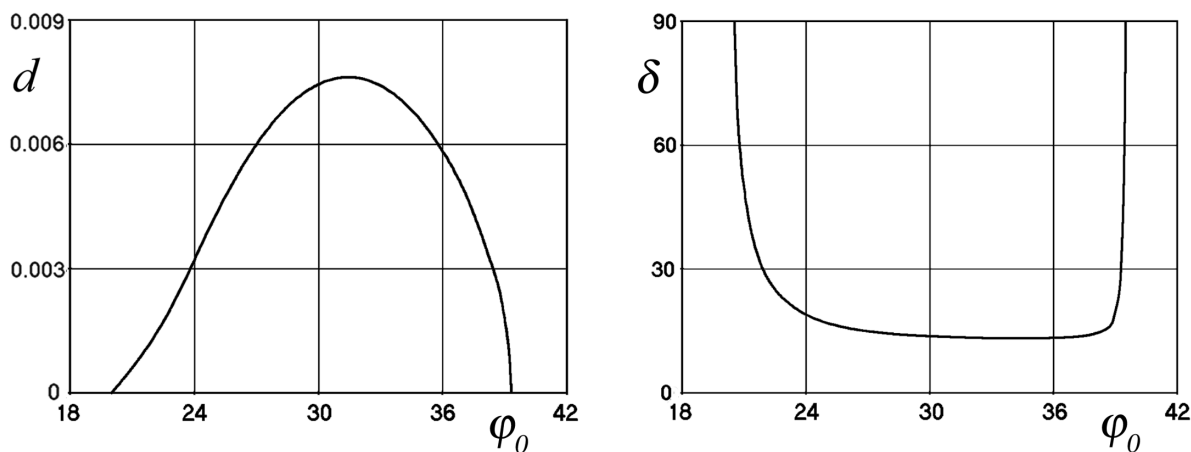


Рис. 4.12: Зависимость ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от угла падения ударной волны при $M_0 = 5$, $Re_{s0} = 100$

небольших значениях числа Рейнольдса (то есть в случае слабоинерционных частиц) $d = 0$, за счет чего $\delta \rightarrow \infty$. С ростом значения Re_0 величина δ монотонно убывает.

На рис. 4.12 представлены графики зависимости характерных параметров фокусировки $d(\varphi_0)$ и $\delta(\varphi_0)$ при $M_0 = 5$, $Re_{s0} = 100$. Интересно, что при значениях φ_0 , близких к границам существования регулярного отражения, пересечения траекторий частиц не происходит ($d = 0$, $\delta \rightarrow \infty$).

На рис. 4.13-4.15 показана зависимость ширины области неоднозначности d и параметра фокусировки δ от определяющих параметров M_0 , Re_{s0} , φ_0 в случае несимметричного взаимодействия ударных волн. Исследование характера зависимости величин d и δ от M_0 проводилось при $Re_{s0} = 100$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$. Кривые $d(M_0)$ в симметричном и несимметричном случаях подобны, но в точке локального максимума d имеет большее значение в последнем случае. Интересно, что кривая $\delta(M_0)$ имеет два локальных минимума, что связано с существенно неоднородным характером области неоднозначности в несимметричном случае.

Вид кривых $d(Re_{s0})$, $\delta(Re_{s0})$ при фиксированных параметрах $M_0 = 4$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$ аналогичен симметричному случаю, однако при сравнении рис. 4.11 и 4.14 заметно, что максимальное значение ширины области

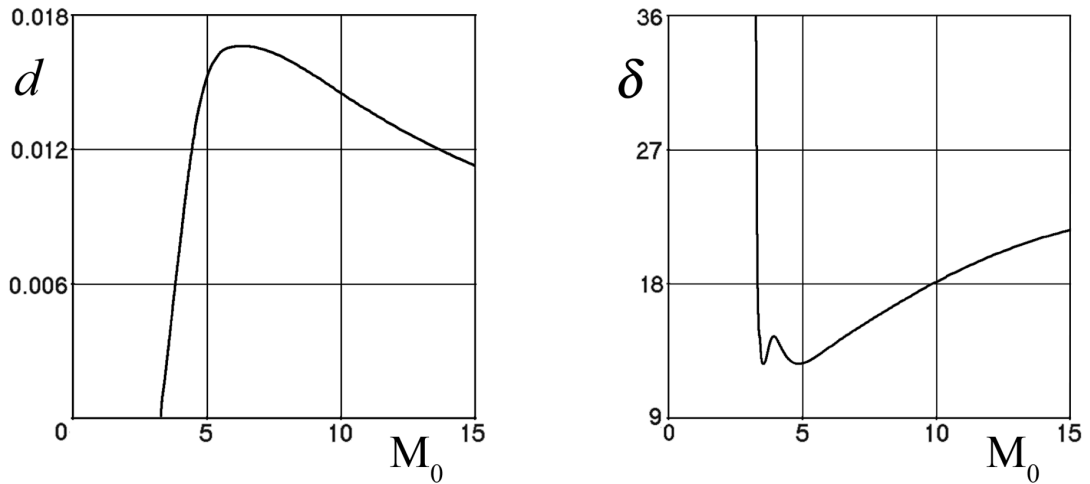


Рис. 4.13: Зависимость безразмерной ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Маха при $Re_{s0} = 100$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$

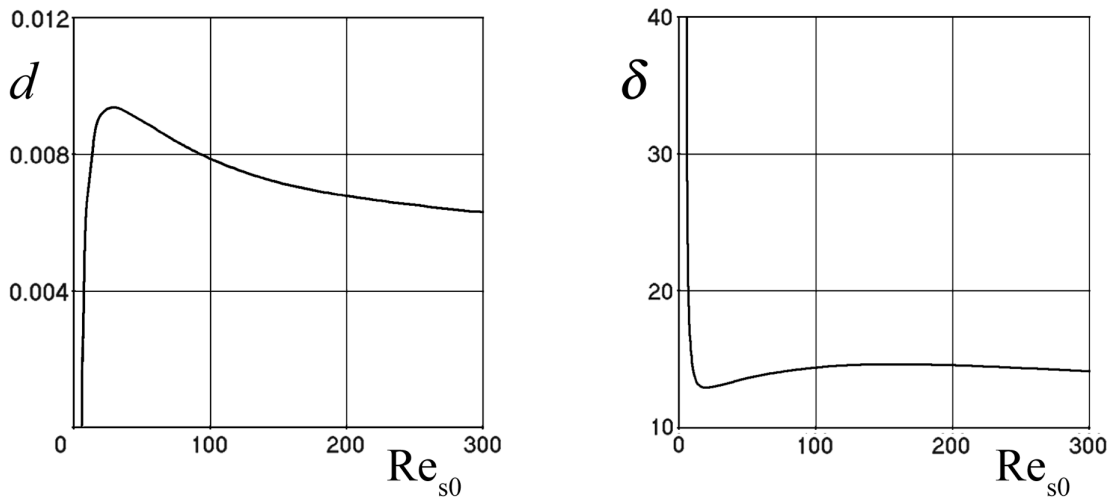


Рис. 4.14: Зависимость ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Рейнольдса обтекания частиц при $M_0 = 4$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\psi_0 = 40^\circ$

неоднозначности в несимметричном случае больше.

Графики зависимости величин d и δ от φ_0 , исследованные при $M_0 = 5$, $Re_{s0} = 100$, $\psi_0 = 20^\circ$, качественно подобны аналогичным кривым в симметричном случае.

Для сравнения эффекта фокусировки частиц при различных режимах течения на рис. 4.16-4.17 приведены графики зависимости ширины области пересекающихся траекторий и параметра фокусировки от чисел Маха и Рей-

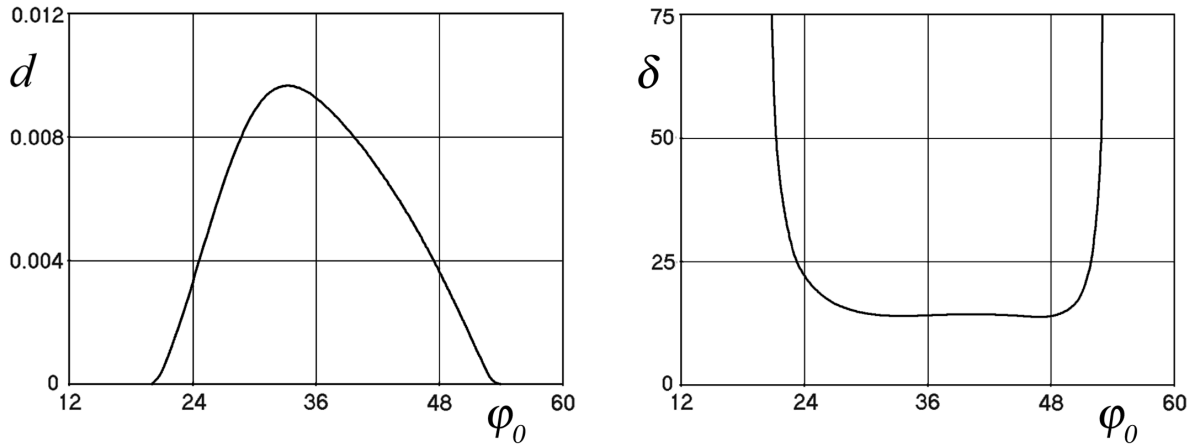


Рис. 4.15: Зависимость ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от угла φ_0 при $M_0 = 5$, $Re_0 = 100$, $\psi_0 = 20^\circ$

нольдса для всех рассматриваемых типов взаимодействия ударных волн. При этом предполагалось, что угол между приходящими волнами $\varphi_0 + \psi_0$ одинаков при симметричном и несимметричном режимах, а их отношение в последнем случае составляет $\varphi_0 : \psi_0 = 1 : 2$. Поскольку при изменении начального числа Маха угол φ_0 , соответствующий нерегулярному взаимодействию волн с прямой маховской «ножкой», не может задаваться произвольно, то при исследовании зависимости d и δ от M_0 , значение угла определяется согласно кривой стационарного маховского взаимодействия (см. рис. 4.2).

Из рис. 4.16, а, 4.17, а видно, что ширина области неоднозначности наибольшая в случае симметричного регулярного взаимодействия и наименьшая – при маховском взаимодействии. Соответственно, параметр фокусировки при маховском режиме принимает максимальное значение, то есть эффект фокусировки частиц в этом случае выражен особенно ярко. При этом для обоих регулярных типов взаимодействия параметр фокусировки отличается слабо (см. рис. 4.16, б, 4.17, б), однако при любом режиме параметр фокусировки достаточно велик ($\delta > 10$).

Как уже упоминалось выше, наиболее эффективной (оптимальной) фокусировке частиц соответствует случай, когда проекция конечного объема дисперсной фазы на плоскость течения стягивается в бесконечно узкую «нить»,

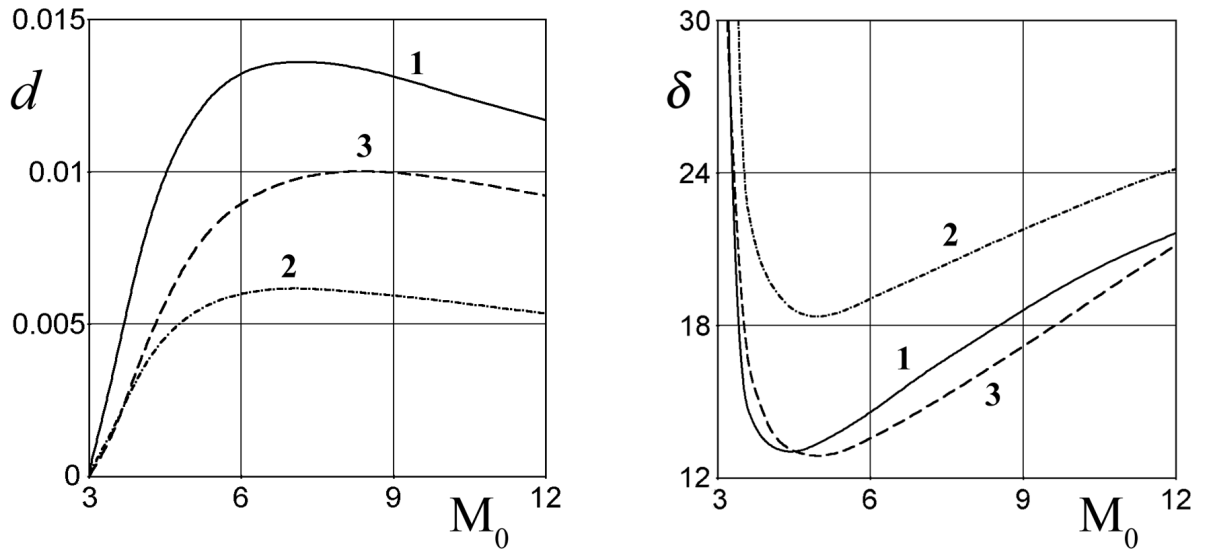


Рис. 4.16: Зависимость ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Маха набегающего потока при $Re_{s0} = 100$ для режимов взаимодействия: регулярного симметричного – 1, маховского симметричного – 2, регулярного несимметричного – 3.

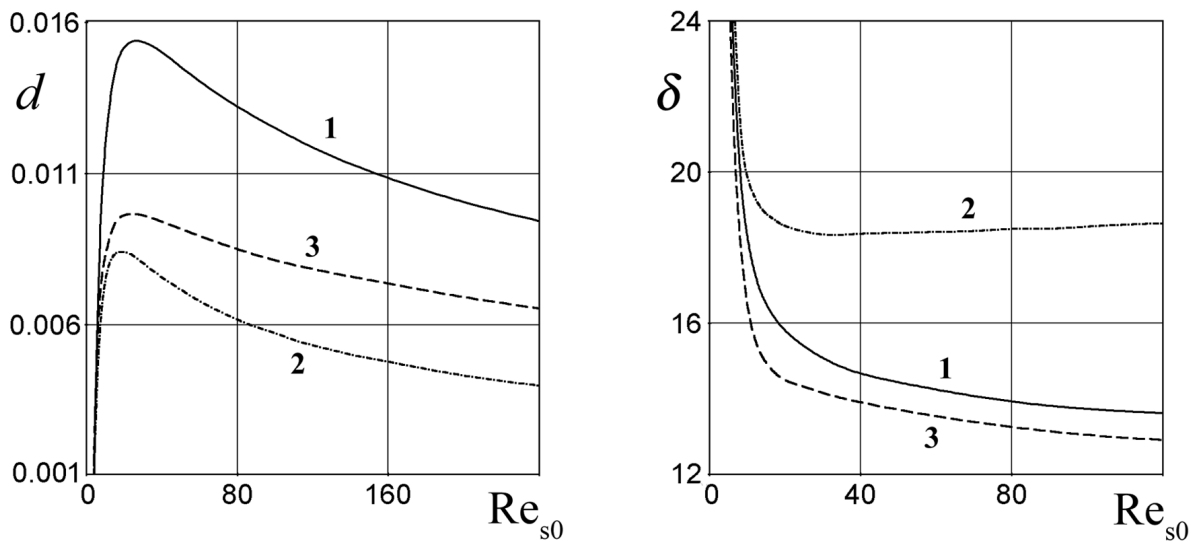


Рис. 4.17: Зависимость безразмерной ширины области неоднозначности и параметра фокусировки от числа Рейнольдса обтекания частиц при $M_0 \approx 5.39$, $\varphi_0 + \psi_0 = 60^\circ$ для режимов взаимодействия: регулярного симметричного – 1, маховского симметричного – 2, регулярного несимметричного – 3.

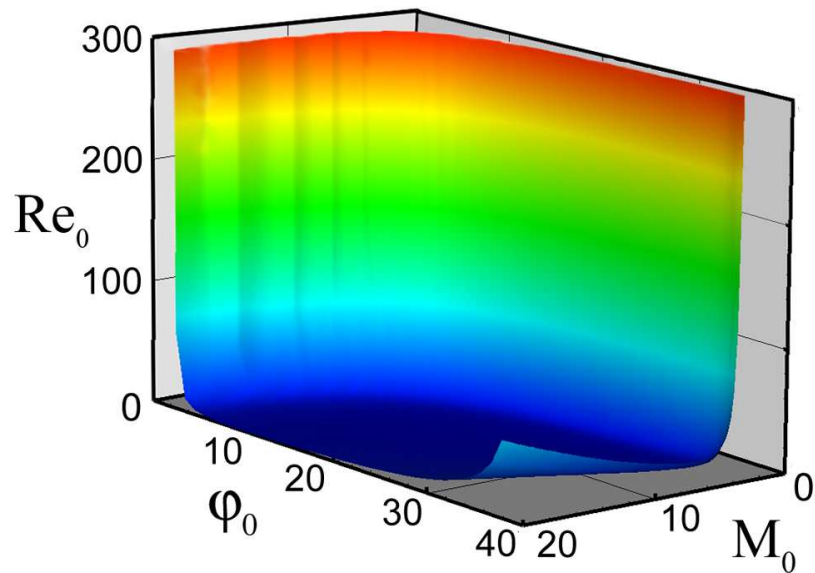


Рис. 4.18: Параметры, соответствующие оптимальным режимам фокусировки частиц

то есть $d = 0$ при конечном значении D . Значения определяющих параметров, отвечающих оптимальному режиму фокусировки частиц при симметричном регулярном взаимодействии, можно изобразить в виде поверхности в области параметров Re_{s0} , M_0 , φ_0 , что показано на рис. 4.18. В случае, когда входящие волны достаточно слабые ($M_0 \sin \varphi_0 \sim 1$), число Рейнольдса обтекания частиц, соответствующее оптимальной фокусировке, принимает значения $Re_{s0} \gg 1$; при $M_0 \sin \varphi_0 > 1$ числа Рейнольдса малы, но с приближением φ_0 к критическому углу перехода к маховскому режиму и для достаточно больших значений числа Маха число Рейнольдса снова возрастает.

Пример режима, соответствующего оптимальной фокусировке, приведен на рис. 4.19 в виде прямоугольного облака частиц, движущегося в стационарной системе пересекающихся скачков уплотнения. Показана деформация объема дисперсной фазы в последовательные моменты времени и хорошо видно, что облако, имеющее изначально конечный размер, стягивается в бесконечно узкую «нить» на оси симметрии.

На рис. 4.20 изображено движение облака частиц при несимметричном взаимодействии ударных волн. В результате разности продольных скоростей

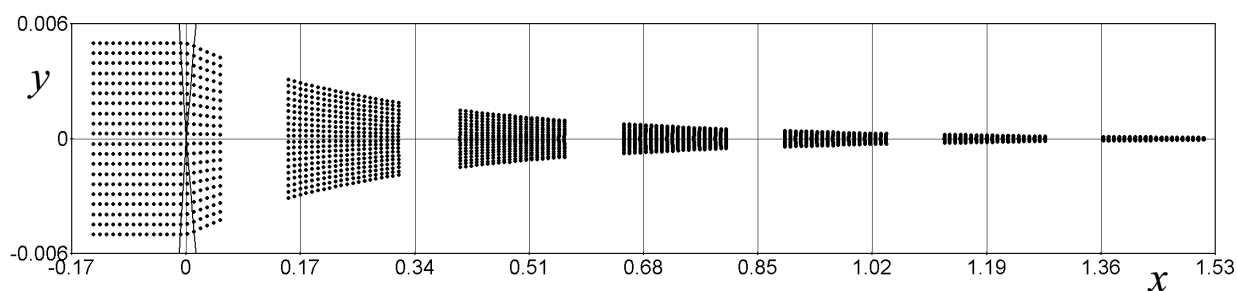


Рис. 4.19: Движение облака частиц в области симметричного взаимодействия ударных волн

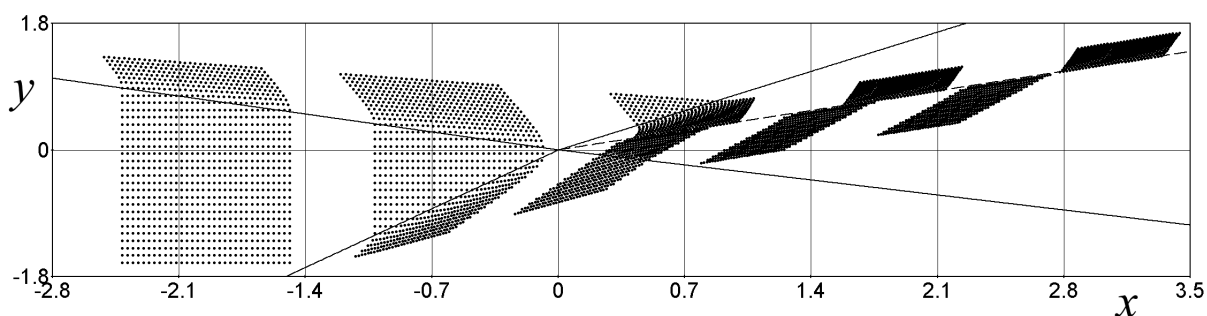


Рис. 4.20: Движение облака частиц в области несимметричного взаимодействия волн

несущей фазы в областях, разделенных тангенциальным разрывом, изначально непрерывное облако частиц разбивается на две фракции, движущиеся с разными скоростями.

Таким образом, на примере движения конечного облака частиц в области пересекающихся плоских скачков продемонстрирован эффект аэродинамической фокусировки частиц и процесс сепарации дисперсного потока.

Выводы

В данной главе исследована задача о взаимодействии двух плоских ударных волн в стационарном потоке запыленного газа при малой массовой концентрации частиц. Рассмотрено как симметричное, так и несимметричное взаимодействие; в симметричном случае исследовано регулярное и маховское взаимодействие, в несимметричном – только регулярное.

Показано, что в широком диапазоне определяющих параметров траекто-

рии частиц за точкой взаимодействия ударных волн пересекаются, и формируется узкая зона аккумуляции частиц – «складка». При регулярном симметричном и маховском взаимодействии в одну точку пространства могут приходиться три траектории частиц, а при регулярном несимметричном – от двух до четырех траекторий. В области пересечения траекторий концентрация частиц возрастает в десятки раз по сравнению с начальным значением, а на границах «складок» обращается в бесконечность.

Исследованы зависимости безразмерной ширины области фокусировки частиц и параметра фокусировки от определяющих параметров задачи для некоторых характерных случаев взаимодействия ударных волн. Установлено, что ширина области пересечения траекторий частиц стремится к нулю при малых значениях числа Маха падающей волны и малых отклонениях закона сопротивления частиц от стоксовского. Эффект фокусировки частиц усиливается при увеличении интенсивности ударных волн (при этом ширина области фокусировки остается конечной), а также в упомянутых выше случаях, когда область пересекающихся траекторий стягивается в бесконечно узкую «нить». В исследованном диапазоне параметров при регулярном взаимодействии ударных волн область фокусировки частиц шире, чем при маховском, а при симметричном шире, чем при несимметричном. При маховском взаимодействии значения параметра фокусировки выше, чем при регулярном. В случаях симметричного и несимметричного регулярного взаимодействия ударных волн значения параметра фокусировки частиц существенно не отличаются.

В пространстве определяющих параметров построена область, соответствующая оптимальным режимам фокусировки частиц, при которых конечный объем дисперсной фазы стягивается в бесконечно узкую «нить». Приведены примеры движения конечного облака частиц в области пересекающихся скачков уплотнения.

Результаты, полученные в этой главе, изложены в работах [124, 127, 128, 130, 133, 136–141].

Глава 5. Взаимодействие косого скачка уплотнения с головной ударной волной при обтекании цилиндра сверхзвуковым запыленным потоком

Рассмотрим стационарное обтекание плоского цилиндра гиперзвуковым потоком слабозапыленного газа в условиях, когда на головную волну падает косой скачок уплотнения, генерируемый клином, расположенным выше по потоку. Основной целью исследования является нахождение условий, при которых за точкой взаимодействия волн, в ударном слое цилиндра могут формироваться высокоэнтальпийные струи дисперсной фазы, попадание которых на обтекаемую поверхность может приводить к пиковым тепловым нагрузкам.

Течение чистого газа при сверхзвуковом обтекании затупленного тела и наличии косого скачка уплотнения неоднократно рассматривалось в литературе, например, в [2, 34, 35, 55, 56]. Edney В.Е. в работе 1968 г. [55] классифицировал подобные течения в зависимости от интенсивности и положения падающего скачка уплотнения и выделил шесть различных типов взаимодействия волн (см. рис. 5.1). Было установлено [55, 70], что в случаях течения III и IV типа распределение давления и теплового потока на поверхности тела имеет локальные максимумы, в несколько раз превышающие Q_0 – значение теплового потока в критической точке при отсутствии падающего скачка. Более детально схемы течения при III и IV режимах взаимодействия представлены на рис. 5.2. В случае III режима локальное увеличение тепловых потоков происходит в результате попадания на поверхность тела слоя смешения. При IV режиме вблизи тела формируется сверхзвуковая высоконапорная струя, которая при соударении с поверхностью может вызывать тепловые нагруз-

ки, интенсивность которых на порядок выше, чем в случае симметричного обтекания цилиндра.

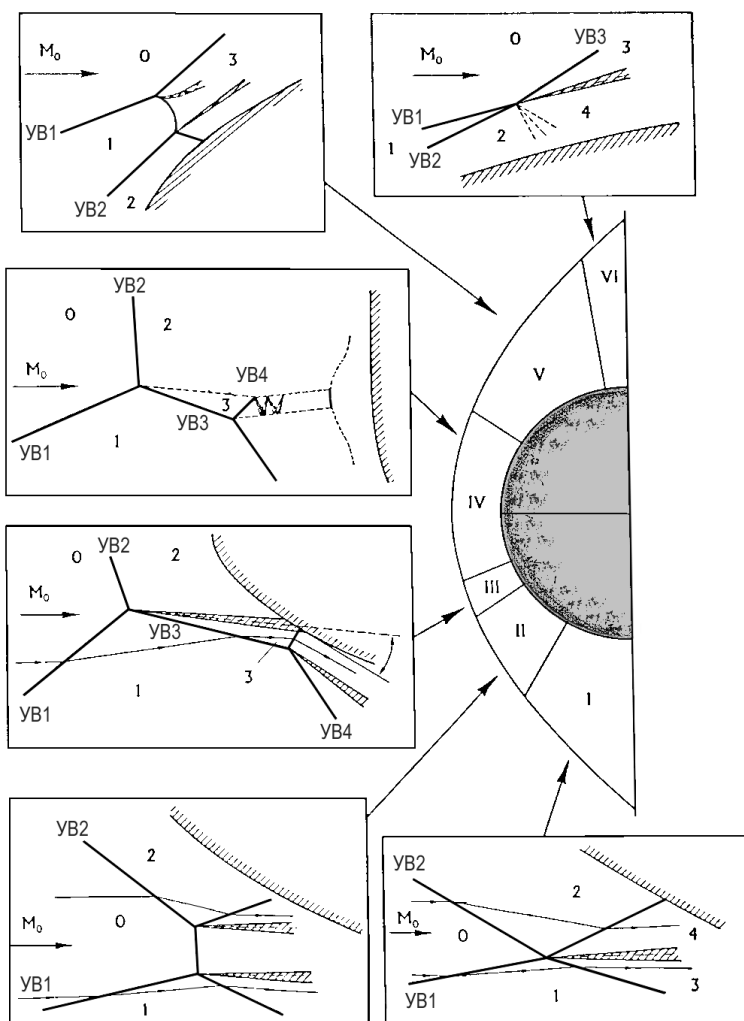


Рис. 5.1: Шесть режимов взаимодействия волн по классификации Edney В.Е. [55]

Очевидно, что наличие твердых дисперсных частиц в набегающем потоке только способствует увеличению тепловых и импульсных нагрузок на поверхность тела, что может стать причиной повреждения обшивки летательного аппарата или разрушения отдельных частей конструкций. Поэтому в данном разделе будут изучены особенности движения частиц при III и IV типах взаимодействия ударных волн. Основные цели исследования: установить, каким образом изменяются поля параметров дисперсной фазы в рассматриваемом случае по сравнению с симметричным обтеканием цилиндра газодисперсным потоком в отсутствие падающего скачка, и проанализировать, в какой сте-

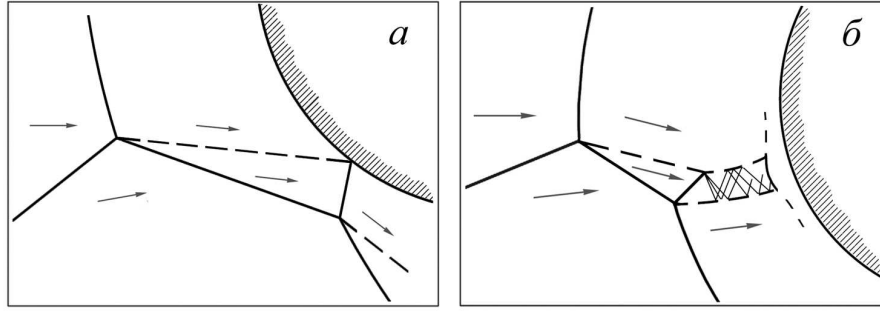


Рис. 5.2: Схемы течения при III (а) и IV (б) режимах взаимодействия волн

пени тепловые потоки к поверхности тела могут возрасти благодаря присутствию твердой дисперсной примеси.

5.1 Моделирование течения несущей и дисперсной фазы

Введем декартову систему координат с началом в лобовой точке цилиндра, оси x и y направим соответственно по нормали и по касательной к поверхности в этой точке. Для описания течения запыленного газа используется двухконтинуальная модель запыленного газа с монодисперсными частицами [22]. Предполагается, что несущая фаза – вязкий совершенный газ с постоянными теплоемкостями c_p и c_v . Дисперсная фаза – твердые сферические частицы радиуса σ^* и массы m . По-прежнему предполагается, что объемная доля частиц пренебрежимо мала, а столкновения и хаотическое движение в среде частиц отсутствуют. Запишем законы сохранения массы, импульса и энергии газовой фазы и среды частиц в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\rho^* \mathbf{V}^*) &= 0 \\
 \rho^* (\mathbf{V}^* \nabla) \mathbf{V}^* &= -\nabla p^* - \frac{2}{3} \nabla(\mu^* \operatorname{div} \mathbf{V}^*) + 2 \operatorname{Div}(\mu^* \mathbf{S}^*) - n_s^* \mathbf{f}_s \\
 c_p \rho^* (\mathbf{V}^* \nabla) T^* &= (\mathbf{V}^* \nabla) p^* + 2\mu^* \left(\mathbf{S}^{*2} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{V}^*)^2 \right) + \operatorname{div}(\lambda^* \nabla T^*) - \\
 &\quad - n_s^* q_s + n_s^* \mathbf{f}_s (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$p^* = \rho^* RT^*$$

$$\operatorname{div}(\rho_s^* \mathbf{V}_s^*) = 0$$

$$\rho_s^* (\mathbf{V}_s^* \nabla) \mathbf{V}_s^* = n_s^* \mathbf{f}_s \quad (5.2)$$

$$c_s \rho_s^* (\mathbf{V}_s^* \nabla) T_s^* = n_s^* q_s$$

Здесь \mathbf{S} – тензор скоростей деформации несущей фазы. Сила аэродинамического сопротивления \mathbf{f}_s и межфазный поток тепла q_s взяты в форме (2.4) и (2.5).

Приведем систему уравнений (5.1)-(5.2) к безразмерному виду, используя в качестве характерных величин радиус обтекаемого цилиндра r и параметры набегающего невозмущенного потока: давление p_0 , плотность ρ_0 , скорость V_0 , температуру T_0 , вязкость μ_0 , теплопроводность газа λ_0 и числовую концентрацию частиц n_{s0} :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (5.3)$$

$$\rho (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \nabla p - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \nabla(\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{2}{\operatorname{Re}} \operatorname{Div}(\mu \mathbf{S}) - \alpha \beta n_s \mu (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) C_f$$

$$\begin{aligned} \rho (\mathbf{V} \nabla) T = & \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\mathbf{V} \nabla) p + \frac{2}{\operatorname{Re}} \mu \left(\mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 \right) + \frac{1}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \operatorname{div}(\mu \nabla T) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\alpha \beta}{\operatorname{Pr}} n_s \lambda (T - T_s) C_q + \alpha \beta n_s \mu (\gamma - 1) M_0^2 (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)^2 C_f \end{aligned}$$

$$p = \rho T$$

$$\operatorname{div}(\rho_s \mathbf{V}_s) = 0$$

$$(\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s = \beta \mu (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) C_f \quad (5.4)$$

$$(\mathbf{V}_s \nabla) T_s = \frac{2}{3} \frac{\beta}{\chi \operatorname{Pr}} \lambda (T - T_s) C_q$$

$$\alpha = n_{s0} m / \rho, \quad \beta = 6\pi \sigma^* \mu_0 r / m V_0, \quad \gamma = c_p / c_v, \quad \chi = c_s / c_p$$

$$M_0 = V_0/\sqrt{\gamma RT_0}, \quad Re = r\rho_0 V_0/\mu_0, \quad Re_{s0} = 2\sigma^* \rho_0 V_0/\mu_0, \quad Pr = c_p \mu_0/\lambda_0$$

Уравнения (5.3)-(5.4) содержат безразмерные параметры: относительную массовую концентрацию частиц α , параметр инерционности частиц β , максимальное число Рейнольдса обтекания частиц Re_{s0} (которое входит в выражение для текущего значения числа Рейнольдса обтекания частиц: $Re_s = Re_{s0} \rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|/\mu$), показатель адиабаты несущей фазы γ , отношение теплоемкостей вещества фаз χ , число Маха невозмущенного потока M_0 , число Рейнольдса обтекания цилиндра Re и число Прандтля Pr . В постановку задачи, кроме того, входят безразмерная температура стенки T_w и два геометрических параметра: θ – угол раствора клина, генерирующего косой скачок уплотнения, и x_l – безразмерная координата пересечения проходящего косого скачка с осью абсцисс. В предположении, что несущая фаза – воздух при нормальных условиях, показатель адиабаты и число Прандтля воздуха могут быть приняты постоянными: $\gamma = 1.4, Pr = 0.7$. Для вычисления зависимости вязкости и теплопроводности от температуры используется формула Саттерлэнда [20]:

$$\mu = \lambda = T^{1.5} \frac{1 + S}{T + S}, \quad S = const$$

Предположим, что массовая концентрация частиц мала ($\alpha \ll 1$). Тогда частицы не оказывают влияния на течение несущей фазы (то есть члены, отвечающие за межфазный обмен импульсом и энергией, в уравнениях (5.3) не учитываются) и задачи о нахождении параметров фаз разделяются: сначала можно рассчитать параметры газа, а затем – движение дисперсных частиц в известном поле скоростей и температур несущей фазы.

Численное решение уравнений Навье-Стокса проводилось с использованием вычислительной технологии и комплекса программ, разработанных в НИИ механики МГУ специально для расчета высокоскоростных течений вязкого газа [33]. Подробное описание численной схемы и метода решения содержится в Приложении II. Указанные программы были модифицированы для рассматриваемой геометрии течения и дополнены блоками, отвечающими за расчет

параметров дисперсной фазы.

Расчет континуальных параметров дисперсной фазы проводится с использованием полного лагранжева подхода (см. раздел 2.2). Вводятся лагранжевы переменные y_0, t , где y_0 – ордината начала траектории на левой границе расчетной области в области невозмущенного течения, где поток параллелен оси x ; $t = t^*V_0/r$ – безразмерное время движения пробной частицы вдоль траектории. Система безразмерных уравнений для вычисления отдельно взятой траектории и распределения скорости, температуры и концентрации частиц вдоль нее имеет вид:

$$\begin{aligned}
 n_s &= \frac{1}{|v_s e - u_s f|} \\
 \frac{dx_s}{dt} &= u_s, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s \\
 \frac{du_s}{dt} &= \beta\mu(u - u_s) C_f(M_s, Re_s) \\
 \frac{dv_s}{dt} &= \beta\mu(v - v_s) C_f(M_s, Re_s) \\
 \frac{dT_s}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{\beta}{\chi Pr} \lambda(T - T_s) C_q
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= g, \quad \frac{df}{dt} = h \\
 \frac{dg}{dt} &= \beta\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} e + \frac{\partial u}{\partial y} f - g \right) C_f + \beta\mu(u - u_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0} + \beta(u - u_s) C_f \frac{\partial \mu}{\partial y_0} \\
 \frac{dh}{dt} &= \beta\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} e + \frac{\partial v}{\partial y} f - h \right) C_f + \beta\mu(v - v_s) \frac{\partial C_f}{\partial y_0} + \beta(v - v_s) C_f \frac{\partial \mu}{\partial y_0}
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$e = \frac{\partial x_s}{\partial y_0}, \quad f = \frac{\partial y_s}{\partial y_0}, \quad g = \frac{\partial u_s}{\partial y_0}, \quad h = \frac{\partial v_s}{\partial y_0}$$

Выражения для производных по лагранжевым координатам от вязкости μ и поправочного коэффициента C_f приведены в Приложении I. Начальные

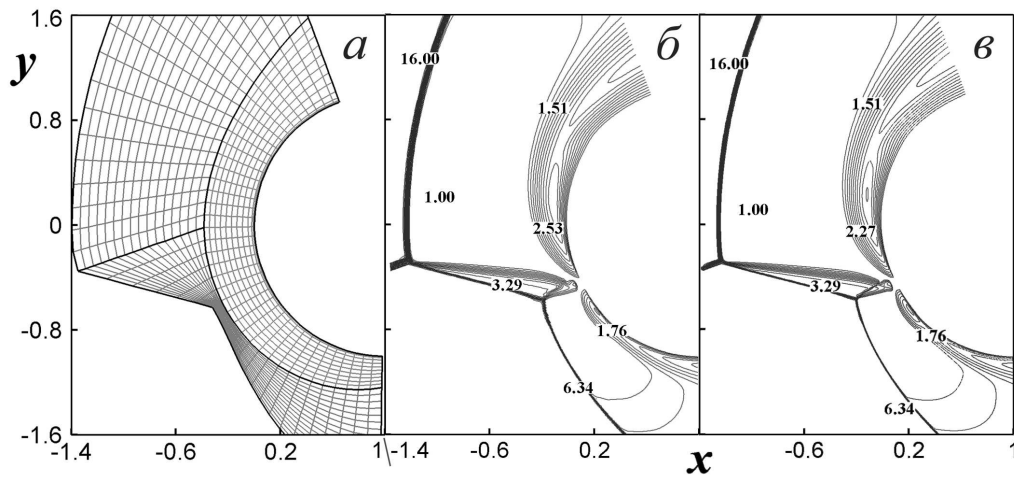


Рис. 5.3: Расчетная сетка (а) и изолинии числа Маха в случае IV типа взаимодействия волн на различных сетках: 200x160 (б), 400x320 (в)

условия для функций параметров частиц при $t = 0$ соответствуют однородному потоку:

$$x_s = x_0, y_s = y_0, u_s = 1, v_s = 0, e = 0, f = 1, g = 0, h = 0, T_s = 1$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.5) решалась для дискретно выбранных траекторий методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Производные от параметров газа в узлах эйлеровой сетки вычислялись по интерполяционным формулам второго порядка точности через производные по направлениям вдоль сеточных линий. Для вычисления параметров газа и их производных внутри ячеек была использована билинейная интерполяция сеточных значений.

5.2 Распределение динамических параметров фаз в ударном слое

Численное интегрирование системы уравнений Навье-Стокса производилось на структурированных неоднородных и адаптированных к внешним скачкам конечно-разностных сетках. На рис. 5.3, а представлена расчетная сетка размером 200x160 (показана лишь каждая пятая сеточная линия) для тесто-

вой задачи с набором определяющих параметров: $M_0 = 16$, $Re = 5.5 \cdot 10^3$, $Pr = 0.7$, $\gamma = 1.4$, $T_w = 1$, $\theta = 15^\circ$, $x_l = -0.36$. Такой конфигурации соответствует ламинарное течение во внешнем потоке и пограничном слое, что исключает появление эффекта неустойчивости при численном моделировании. Изображенная на рис. 5.3, а сетка разделена на три зоны в соответствии с физическими характеристиками потока, границы зон показаны более темными линиями. Видно, что в приповерхностной зоне сетка сильно сгущается, что необходимо для более аккуратного расчета течения в пограничном слое. Указанный случай течения был рассчитан на сетках различных размеров: 200×160 и 400×320 . Изолинии числа Маха для обоих случаев представлены на рис. 5.3 б, в соответственно. Видно, что на мелкой сетке фронты ударных волн резче, чем на более грубой, однако в остальной картины полностью идентичны. Таким образом, сетка 200×160 вполне адекватно отображает все элементы течения газовой фазы, поэтому в большинстве численных исследований используется именно такая размерность расчетной сетки.

Далее приведены результаты расчетов для двух частных случаев, исследованных для течения чистого газа в экспериментальной работе [48]. Эти случаи различаются между собой значением $x_l = 0.42$ (а) и $x_l = -0.23$ (б). Другие определяющие параметры принимают одинаковые в обоих случаях значения: $M_0 = 6$, $Re = 2.25 \cdot 10^5$, $Pr = 0.7$, $\gamma = 1.4$, $T_w = 1$, $\theta = 15^\circ$. Два рассматриваемых случая соответствуют III и IV типам взаимодействия волн по классификации [55], при которых реализуется наибольший рост локальных тепловых потоков со стороны несущей фазы на поверхности цилиндра. На рис. 5.4 показаны найденные распределения числа Маха для двух исследуемых режимов. Полученные поля динамических параметров несущей фазы с высокой точностью совпадают с экспериментальными результатами из [48].

При фиксированном поле течения газовой фазы движение и теплоперенос в среде частиц зависят от отношения теплоемкостей фаз χ и двух параметров, характеризующих инерционность частиц (β, Re_{s0}). Численные расчеты

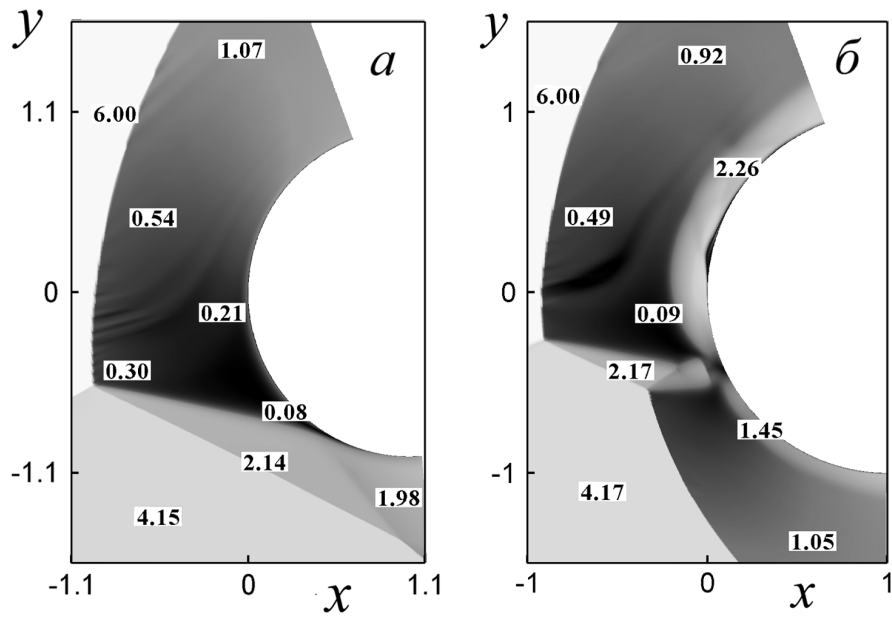


Рис. 5.4: Распределение значений числа Маха для III (а) и IV (б) режимов взаимодействия волн

проводились для отношения теплоемкостей фаз $\chi = 1$ для дискретных наборов остальных безразмерных определяющих параметров, соответствующих нескольким фиксированным отношениям плотностей фаз $\eta = \rho_{s0}^0/\rho_0$ и различным значениям безразмерного радиуса частиц $\sigma = \sigma^*/r$.

В таблице 1 приведены значения параметра β , соответствующие некоторым использованным в расчетах значениям σ и η , а также значения числа Рейнольдса обтекания частиц Re_{s0} (нижняя строка), которое при фиксированном $Re = 2.25 \cdot 10^5$ определяется только отношением масштабов длины σ .

Таблица 1.

$\eta \setminus \sigma$	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-2}
500	$4 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$
1000	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$
2000	10^{-4}	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	10^{-8}
5000	$4 \cdot 10^{-5}$	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-9}$
Re_{s0}	$4.5 \cdot 10^3$	$1.35 \cdot 10^4$	$2.25 \cdot 10^4$	$4.5 \cdot 10^4$	$4.5 \cdot 10^5$

На рис. 5.5 приведены полученные в результате численных расчетов траектории частиц (а), а также поля числовой концентрации (б) и температуры частиц (в) для III режима. Представленные картины течения соответствуют $\eta = 10^3$ и различным размерам частиц (в порядке сверху вниз): $\sigma = 10^{-3}$, $7 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$, 10^{-4} . На рис. 5.6 изображены траектории, концентрация и температура частиц в случае IV режима, соответствующие значениям безразмерного радиуса частиц: $\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$, 10^{-3} , $5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-4} . Отраженные от поверхности цилиндра частицы не учитывались в расчетах.

По мере уменьшения радиуса частиц (при этом параметр инерционности частиц β увеличивается) характер их траекторий меняется от практически параллельного потока до режима, при котором твердые частицы движутся практически без проскальзывания с несущей фазой. Поля концентрации и температуры в случае крупных частиц достаточно гладкие, тогда как для более мелких частиц становится заметно влияние особенностей поля течения несущей фазы на характер изменения параметров частиц.

При определенных значениях размера частиц (параметра инерционности) вследствие взаимодействия элементов течения газовой фазы образуется кумулятивная «струя» частиц, попадающая на поверхность обтекаемого тела. За счет этой «струи» пиковые тепловые нагрузки на тело могут значительно возрастать по сравнению с нагрузкой в лобовой точке цилиндра, обтекаемого запыленным потоком без падающего косога скачка. Из рис. 5.5, а и 5.6, а видно, что вблизи тела могут возникать области, свободные от частиц, а также области пересекающихся траекторий частиц («складки»), состоящие из нескольких слоев дисперсной фазы, каждый из которых обладает собственными параметрами. На границах подобных «складок» числовая плотность частиц неограниченно возрастает, однако данная особенность является интегрируемой, и бесстолкновительная модель запыленного газа остается применимой [27].

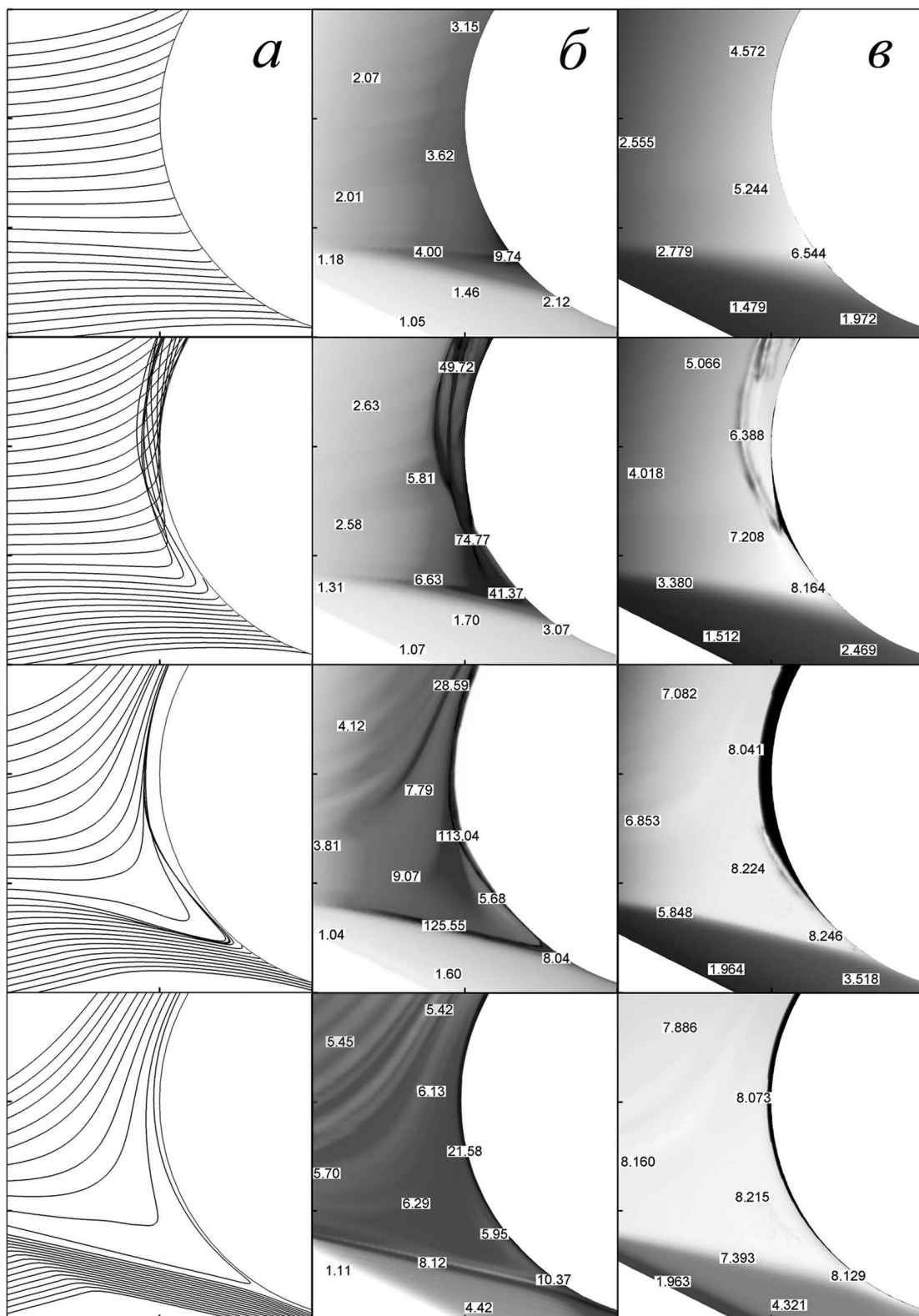


Рис. 5.5: Траектории (а), распределение концентрации (б) и температуры частиц (в) при III режиме течения. Поля параметров показаны в диапазоне от -0.7 до 0.7 по x и от -1 до 0.5 по y .

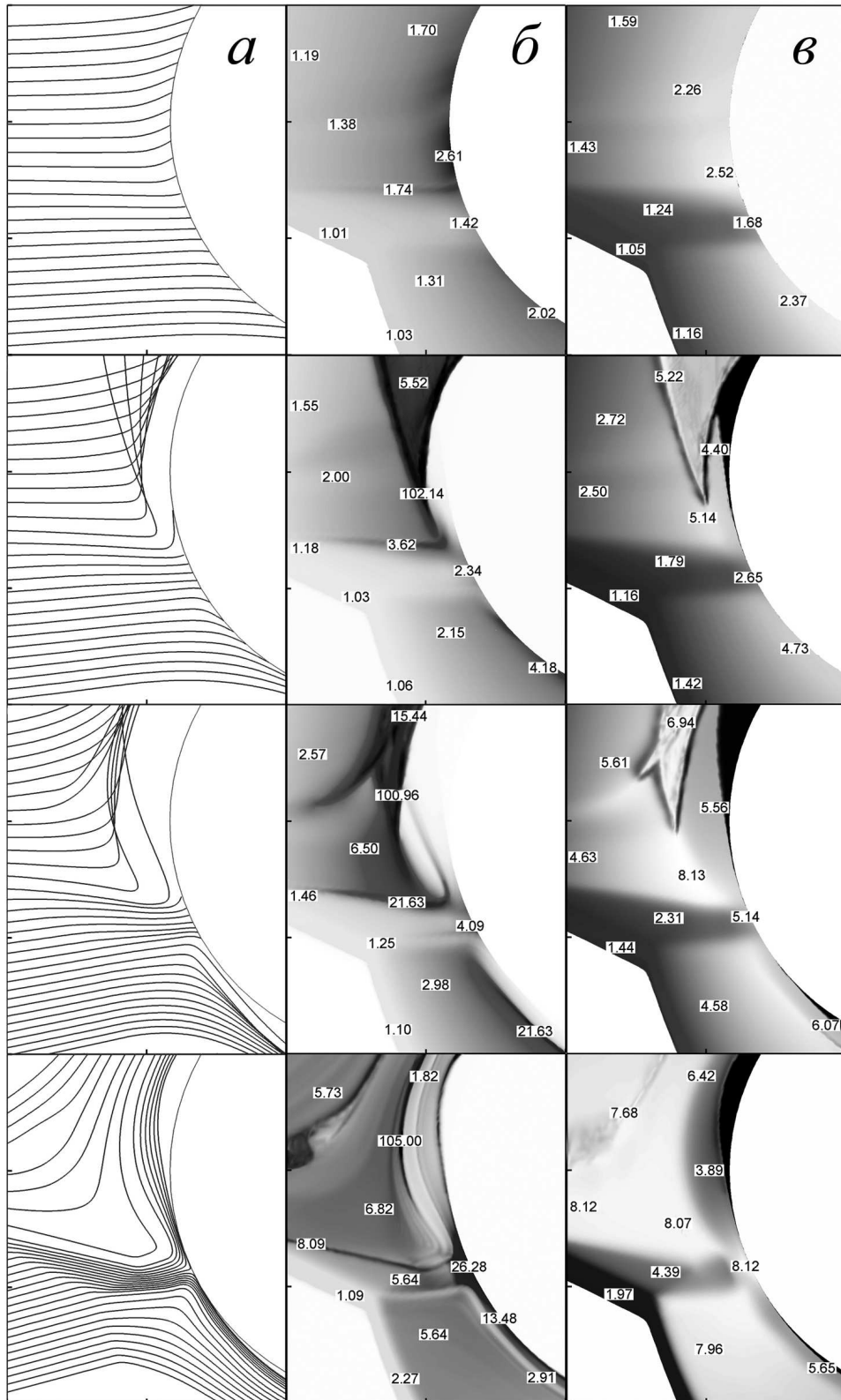


Рис. 5.6: Траектории (а), распределение концентрации (б) и температуры частиц (в) при IV режиме течения. Поля параметров показаны в диапазоне от -0.7 до 0.5 по x и от -1 до 0.5 по y .

5.3 Анализ увеличения тепловых потоков, обусловленного наличием дисперсных частиц в набегающем потоке

Для оценки максимальной величины теплового потока к поверхности цилиндра, обусловленного наличием выпадающих на поверхность твердых частиц, используем выражение для потока полной энергии частиц, спроектированного на нормаль к поверхности тела:

$$Q_s^* = mn_s^* V_{sn}^* \left(\frac{V_s^{*2}}{2} + c_s (T_s^* - T_w^*) \right) \quad (5.6)$$

Данная формула выражает максимальное значение притока тепла со стороны дисперсной фазы в режиме осаждения частиц, иными словами, в запыленном газе тепловые потоки к поверхности возрастают на величину Q_s^* по сравнению с чистым газом при условии, что вся тепловая и кинетическая энергия частиц полностью расходуется на нагрев обтекаемого тела. На практике только некоторая часть энергии частиц передается обтекаемой поверхности, эта величина зависит от многих факторов, например, упругих и теплофизических свойств материала частиц, характера взаимодействия частиц с поверхностью, наличия слоя отраженных частиц и т.д.. В случаях, когда кинетическая энергия падающих частиц достаточно велика, в экспериментальной работе [54] для оценки реального теплового потока дисперсной фазы предлагается в формуле (5.6) перед правой частью добавить поправочный коэффициент 0.7.

Одной из целей исследования был вопрос, в какой мере косоугольный скачок уплотнения, падающий на головную ударную волну, может повлиять на распределение тепловых потоков к поверхности тела. Поэтому сначала были проведены расчеты обтекания цилиндра гиперзвуковым потоком запыленного газа в отсутствие падающего косоугольного скачка. На рис. 5.7 представлено распределение безразмерного потока полной энергии частиц Q_s в зависимости от угла φ между осью x и радиальным направлением, меняющегося от значения -90°

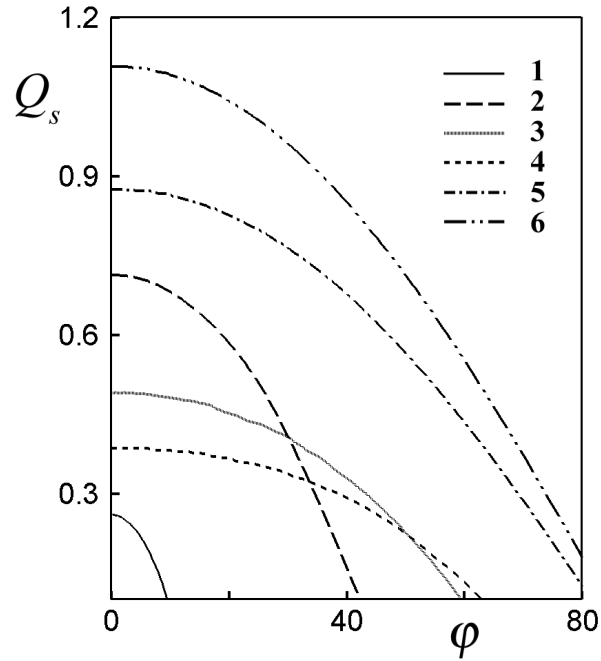


Рис. 5.7: Изменение полного потока энергии частиц вдоль поверхности цилиндра при симметричном обтекании. Кривые соответствуют различным значениям радиуса частиц σ : 1 – $3.2 \cdot 10^{-4}$, 2 – $5 \cdot 10^{-4}$, 3 – $8 \cdot 10^{-4}$, 4 – 10^{-3} , 5 – $5 \cdot 10^{-3}$, 6 – 10^{-2}

в самой нижней точке до 90° в самой верхней точке цилиндра. Поток энергии частиц отнесен к значению теплового потока со стороны несущей фазы в критической точке, которое было вычислено по формуле, взятой из [10]:

$$Q_0 = 0.57 \text{Pr}^{0.4} \lambda_w (T_{\infty 0} - T_w) \sqrt{\frac{V_0 \rho_w}{r \mu_w}} \left(\frac{2\rho_0}{\rho_{\infty 1}} \right)^{0.25} \left(\frac{\mu_{\infty 1} \rho_{\infty 1}}{\mu_w \rho_w} \right)^{0.44}$$

Здесь индексом 0 обозначены параметры набегающего потока, индексами $\infty 0$ и $\infty 1$ – параметры торможения в набегающем потоке и за прямым скачком уплотнения соответственно, значения параметров с индексом w берутся при температуре стенки и полном давлении за прямым скачком уплотнения.

На рис. 5.7 приведены результаты для значения относительной массовой концентрации частиц в набегающем потоке, равного 1%, при этом вклад частиц в теплообмен сравним с величиной теплового потока газа, имеющего максимальное значение, равное единице, при $\varphi = 0$. Поскольку тепловые потоки со стороны дисперсной фазы пропорциональны концентрации частиц, результаты для других значений массовой концентрации дисперсной фазы

получаются умножением представленных на графиках значений относительных тепловых потоков на $10^2\alpha$. При отсутствии косо́го скачка максимальное значение потока энергии частиц Q_{s0} приходится на лобовую точку затупленного тела. Величина Q_{s0} зависит от безразмерного радиуса частиц немонотонно: при относительно небольших значениях σ существует локальный максимум (рис. 5.8). Немонотонный характер зависимости Q_{s0} от σ объясняется наличием двух слагаемых в выражении для полной энергии – кинетической энергии и избыточной энтальпии дисперсной фазы. В случае тяжелых частиц свойства дисперсной фазы вблизи тела мало отличаются от ее свойств в набегающем потоке, поэтому основную часть полной энергии частиц составляет кинетическая энергия. С уменьшением значения σ скорость частиц в критической точке снижается, следовательно, уменьшается и их кинетическая энергия, однако, мелкие частицы успевают нагреться до температуры газа в ударном слое, тепловая энергия частиц на поверхности цилиндра значительно возрастает и становится доминирующим слагаемым в общем потоке энергии.

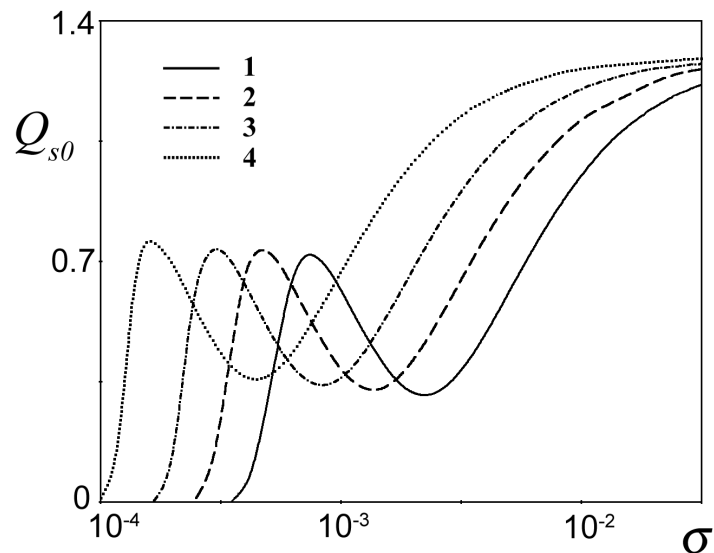


Рис. 5.8: Максимальное значение полного потока энергии частиц в зависимости от радиуса частиц. Различные кривые соответствуют значениям η : 1 – $5 \cdot 10^2$, 2 – 10^3 , 3 – $2 \cdot 10^2$, 4 – $5 \cdot 10^3$.

Перейдем к исследованию влияния дисперсной фазы на теплообмен при наличии падающего скачка уплотнения. Как было показано выше, в данном случае движение частиц существенно отличается от случая симметричного обтекания, что отражается и на распределении тепловых потоков дисперсной фазы вдоль поверхности тела. На рис. 5.9 и 5.10 представлена зависимость безразмерного потока полной энергии частиц Q_s от радиального угла φ для режимов III и IV соответственно. Данная зависимость приведена для различных значений безразмерного радиуса частиц σ . Для III режима массовая концентрация частиц α в набегающем потоке полагалось равной 1%, в случае IV режима – равной 3%. В случае очень крупных частиц размерный поток энергии на поверхности тела равен $\frac{1}{2}mn_{s0}V_0^3 \cos \varphi$, где n_{s0} и V_0 – размерные концентрация и скорость частиц в набегающем потоке. С уменьшением радиуса частиц поток тепла со стороны дисперсной фазы снижается, однако затем, при определенных значениях σ , в потоке образуются структуры с высокой концентрацией частиц, что приводит к резкому возрастанию Q_s в локальных точках поверхности тела. Поскольку в рамках используемой модели точечных невзаимодействующих частиц числовая концентрация на каустиках неограниченно (но интегрируемым образом) возрастает, при попадании такой каустики на поверхность тела локальный тепловой поток также должен неограниченно возрастать. Если проинтегрировать тепловой поток по малому участку поверхности, имеющему линейный масштаб порядка размера реальной частицы, то бесконечность устраняется.

На графиках, представленных на рис. 5.9, 5.10, приведены также экспериментально измеренные в [48] распределения тепловых потоков со стороны чистого газа. Видно, что тепловые потоки со стороны газа и частиц имеют максимумы приблизительно в одной и той же области поверхности тела, при этом даже для невысокой массовой концентрации частиц в набегающем потоке вклады обеих фаз в теплообмен сравнимы.

Необходимо добавить, что пристеночные зоны, в которых проявляются эффекты вязкости и теплопроводности газа, малы по сравнению с длиной

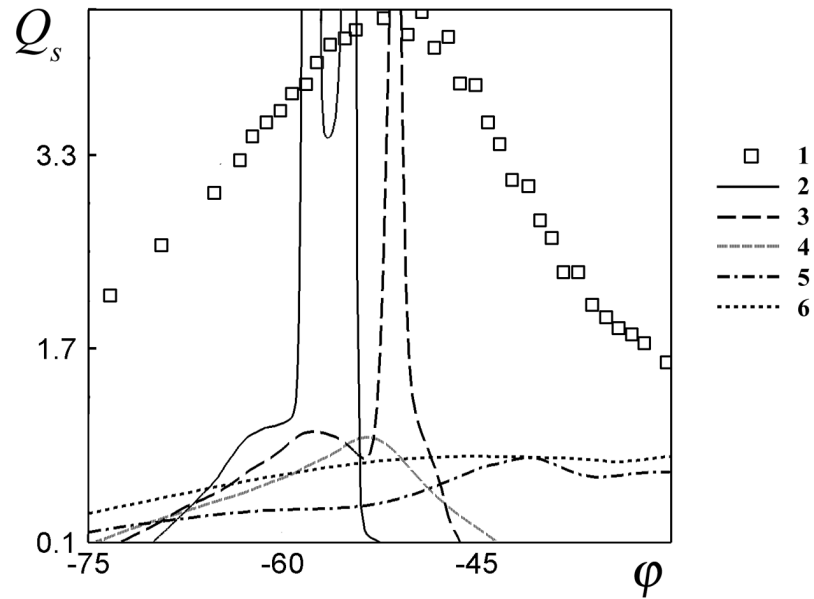


Рис. 5.9: Распределение теплового потока вдоль поверхности цилиндра при III режиме течения. Кривая 1 соответствует чистому газу [48], кривые 2-6 изображают полный поток энергии частиц при $\eta = 10^3$ для различных значений радиуса частиц σ : 2 – $3 \cdot 10^{-4}$, 3 – $4 \cdot 10^{-4}$, 4 – $5 \cdot 10^{-4}$, 5 – 10^{-3} , 6 – 10^{-2}

релаксации инерционных частиц, то есть эти факторы не способны существенно повлиять на движение и теплообмен в дисперсной фазе. Свойства потока частиц, выпадающих на тело, полностью определяются невязкой областью течения в ударном слое. Поэтому распределение тепловых потоков газа на поверхности цилиндра, полученное в результате численного решения уравнений Навье-Стокса, здесь не показано, а производится сопоставление вычисленных тепловых потоков частиц с тепловыми потоками несущей фазы, полученных из экспериментальных исследований.

При сравнении исследуемых режимов течения с симметричным можно заметить, что отношение максимального значения теплового потока частиц в несимметричных случаях (при наличии косога скачка) к величине Q_{s0} растет с уменьшением размеров частиц, что объясняется наличием структур в поле течения дисперсной фазы, описанных выше, которые в симметричном случае не образуются. Интересно, что существует небольшой диапазон значений σ ,

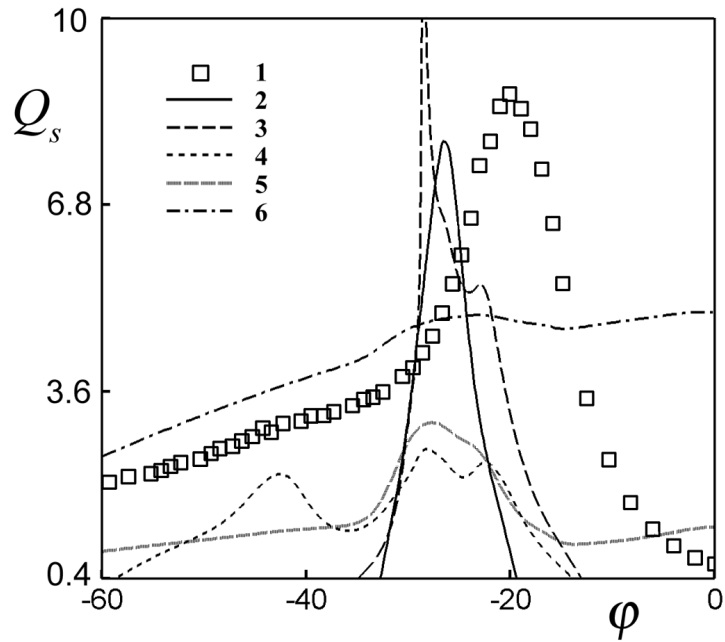


Рис. 5.10: Распределение теплового потока вдоль поверхности цилиндра при IV режиме течения. Кривая 1 соответствует чистому газу [48], кривые 2-6 изображают полный поток энергии частиц при $\eta = 10^3$ для различных значений радиуса частиц σ : 2 – $2 \cdot 10^{-4}$, 3 – $4 \cdot 10^{-4}$, 4 – 10^{-3} , 5 – $3 \cdot 10^{-3}$, 6 – $2 \cdot 10^{-2}$

при которых в случае симметричного обтекания осаждения частиц не происходит, тогда как в присутствии косога скачка частицы еще продолжают выпадать на поверхность цилиндра.

Заслуживает внимание и тот факт, что при III типе взаимодействия на поверхность попадают «пучки» частиц с более высокой концентрацией (рис. 5.9), а значит, рост пиковых тепловых нагрузок на отдельных участках поверхности более интенсивный, чем при IV типе. Таким образом, дисперсные частицы могут оказывать более заметное влияние на увеличение тепловых потоков в случае III режима взаимодействия ударных волн.

Выводы

В данной главе численно исследовано взаимодействие косога скачка уплотнения с головной ударной волной при обтекании плоского цилиндра стационар-

ным гиперзвуковым запыленным потоком. В предположении, что массовая концентрация частиц мала, в рамках полных уравнений Навье-Стокса рассчитаны поля параметров несущей фазы для частных случаев III и IV типов взаимодействия. Полученные результаты с высокой точностью совпадают с данными экспериментальных исследований.

С использованием полного лагранжева подхода рассчитаны траектории и поля континуальных параметров дисперсной фазы вблизи цилиндра для различных инерционных свойств частиц. Установлено, что для умеренно инерционных частиц в поле течения дисперсной фазы могут возникать локальные зоны («пучки» и «складки»), в которых траектории частиц пересекаются, а концентрация частиц резко увеличивается. В местах попадания таких «пучков» на поверхность тела локальные тепловые потоки со стороны дисперсной фазы значительно возрастают. Установлено, что даже при массовой концентрации частиц в набегающем потоке порядка одного процента поток энергии частиц в локальных точках поверхности может вносить существенный вклад в суммарное значение теплового потока, причем максимумы тепловых потоков со стороны несущей и дисперсной фаз приходится приблизительно на одну и ту же область боковой поверхности цилиндра. Установлено, что при III типе взаимодействия влияние частиц на увеличение общего теплового потока может быть гораздо значительнее, чем при IV типе.

Результаты данной главы изложены в работах [126, 132, 134].

Заключение

Проведено обширное исследование стационарных течений запыленного газа при наличии взаимодействующих ударных волн и других особенностей в поле несущей фазы. Показано, что при достаточно высокой массовой концентрации частиц в аэродисперсном потоке возможны непрерывные формы волн сжатия – волны с полной дисперсией. Установлено, что при регулярном взаимодействии двух плоских скачков уплотнения возможны конфигурации, при которых любые из проходящих или исходящих скачков (в том числе и все скачки одновременно) вырождаются в волны с полной дисперсией. В случаях как симметричного, так и несимметричного взаимодействия найдены диапазоны определяющих параметров (числа Маха, углов между проходящими волнами и набегающим потоком, отношения теплоемкостей фаз и массовой концентрации частиц), соответствующие всем возможным волновым конфигурациям.

Численно рассчитана структура неравновесного течения «внутри» волны с полной дисперсией, а также в области симметричного взаимодействия скачков для типичных волновых конфигураций, включающих волны с полной дисперсией. Показано, что ширина таких волн заметно превосходит характерную длину скоростной релаксации частиц. Анализ структуры прямой волны с полной дисперсией в запыленном газе показал, что с увеличением массовой концентрации частиц ширина области неравновесного течения резко уменьшается, а также что существует диапазон параметров, в котором температура несущей фазы внутри волны имеет локальный максимум.

На основе результатов численных расчетов течения запыленного газа в

рамках двухскоростной модели сделан вывод, что для исследования глобальных характеристик запыленного потока с волнами сжатия приближение «эффективного газа» применимо всюду за исключением узких локальных зон, возникающих при наличии достаточно интенсивных волн.

Установлено, что при взаимодействии сильных ударных волн инерционные частицы могут фокусироваться за точкой взаимодействия, образуя «пучки» с высокими локальными значениями кинетической энергии дисперсной фазы. Аэродинамическая фокусировка частиц, возникающая в течениях подобного типа, исследована в предположении, что массовая концентрация частиц мала. Рассмотрено три различных режима взаимодействия плоских ударных волн: симметричное регулярное, симметричное маховское и несимметричное регулярное. Показано, что в широком диапазоне определяющих параметров траектории частиц за точкой взаимодействия волн пересекаются и формируется узкая зона накопления частиц, концентрация в которой возрастает в несколько раз по сравнению с начальным значением.

Проведено подробное параметрическое исследование ширины области пересечения траекторий частиц и характера аэродинамической фокусировки частиц. Установлено, что наиболее эффективная фокусировка реализуется при маховском режиме, а также при взаимодействии волн слабой интенсивности и малых отклонениях закона сопротивления частиц от стоксовского. Для случая симметричного регулярного взаимодействия определены условия, отвечающие оптимальным режимам фокусировки частиц, при которых конечный объем дисперсной фазы стягивается в бесконечно узкую «нить».

Возможность формирования локальных областей накопления частиц обнаружена и в случае более сложных конфигураций течения. В данной работе исследовано взаимодействие косоугольного скачка уплотнения с головной ударной волной при обтекании плоского цилиндра стационарным гиперзвуковым запыленным потоком. Рассмотрены некоторые частные случаи III и IV типов взаимодействия. Распределение параметров газа в ударном слое около цилиндра найдено из численного решения полных уравнений Навье-Стокса для со-

вершенного газа. Траектории и поля континуальных параметров дисперсной фазы рассчитаны с использованием полного лагранжева подхода для различных инерционных свойств частиц. Установлено, что для умеренно инерционных частиц в поле течения дисперсной фазы могут возникать узкие зоны, в которых траектории частиц пересекаются, а концентрация частиц резко увеличивается. В случае III типа взаимодействия высока вероятность попадания на поверхность тела таких «струй» частиц, что вызывает резкое увеличение тепловых потоков в локальных точках поверхности. Однако и в отсутствие таких кумулятивных «струй» вклад дисперсных частиц в теплообмен в приповерхностной зоне значителен даже при массовой концентрации частиц в набегающем потоке порядка одного процента. При этом максимумы тепловых потоков со стороны несущей и дисперсной фаз приходятся приблизительно на одну и ту же область боковой поверхности цилиндра.

Приложение

I. Вычисление производных от поправочного коэффициента

В работе используется поправочный коэффициент к закону аэродинамического сопротивления при движении частицы в газе, взятый в форме [49]:

$$C_f(M_s, Re_s) = \frac{(1 + Re_s^{0.67}/6)(1 + \exp(-0.427/M_s^{4.63}) \exp(-3/Re_s^{0.88}))}{1 + M_s/Re_s(3.82 + 1.28 \exp(-1.25Re_s/M_s))}$$

Производная от C_f по лагранжевой координате y_0 :

$$\frac{\partial C_f}{\partial y_0} = e \frac{\partial C_f}{\partial x} + f \frac{\partial C_f}{\partial y}$$

Здесь $e = \partial x / \partial y_0$ и $f = \partial y / \partial y_0$.

Введем обозначения:

$$C_0 = 1 + Re_s^{0.67}/6$$

$$C_1 = 1 + \exp(-0.427/M_s^{4.63}) \exp(-3/Re_s^{0.88})$$

$$C_2 = 1 + M_s/Re_s(3.82 + 1.28 \exp(-1.25Re_s/M_s))$$

Тогда выражение для производной от C_f по координате x выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_f}{\partial x} = \frac{1}{C_2} \left[\frac{C_1}{9\sqrt{Re_s}} \frac{\partial Re_s}{\partial x} + C_0 \exp \left(-\frac{0.427}{M_s^{4.63}} - \frac{3}{Re_s^{0.88}} \right) \left(\frac{1.977}{M_s^{5.63}} \frac{\partial M_s}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2.64}{Re_s^{1.88}} \frac{\partial Re_s}{\partial x} \right) - \frac{C_0 C_1}{C_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M_s}{Re_s} \right) \left(3.82 + 1.28 \left(1 + 1.25 \frac{Re_s}{M_s} \right) \exp \left(-1.25 \frac{Re_s}{M_s} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Где

$$\text{Re}_s = \text{Re}_{s0} \frac{\rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\mu}$$

$$\text{M}_s = \text{M}_{s0} \frac{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\sqrt{T}}$$

$$\frac{\partial \text{M}_s}{\partial x} = \frac{\text{M}_0}{\sqrt{T}} \left(\frac{\partial |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\partial x} - \frac{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{2T} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \text{Re}_s}{\partial x} = \frac{\text{Re}_{s0}}{\mu} \left(|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s| \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\partial x} - \frac{\text{Re}_s}{\text{Re}_{s0}} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)$$

Здесь использованы безразмерные параметры $x, y, \mathbf{V}, \rho, \mu, T$ и предполагается, что поля этих параметров и их производные по декартовым координатам x, y известны.

Если динамическая вязкость зависит от температуры по степенному закону $\mu = T^{0.76}$, тогда:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.76 T^{-0.24} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{M}_s}{\text{Re}_s} \right) = \frac{\text{M}_0}{\text{Re}_{s0} \rho} \left(\frac{0.26}{T^{0.74}} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T^{0.26}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

Если для вязкости используется формула Саттэрленда $\mu = k_0 T^{1.5} / (T + k_1)$, где k_0, k_1 – известные константы, тогда:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{k_0 \sqrt{T}}{T + k_1} \left(1.5 - \frac{T}{T + k_1} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{M}_s}{\text{Re}_s} \right) = \frac{\text{M}_0}{\text{Re}_{s0} \rho} \frac{k_0}{(T + k_1)} \left(\left(1 - \frac{T}{T + k_1} \right) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

Производные от C_f и других функций по y вычисляются аналогичным образом.

II. Алгоритм расчета течения вязкого теплопроводного газа

Для численного моделирования высокоскоростных течений вязкого теплопроводного газа используется интегральная форма нестационарных уравнений Навье-Стокса, которая в двумерном плоском случае в системе координат (x, y) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{U} d\Sigma + \int_{\delta\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} dl = 0 \quad (6.1)$$

Здесь Σ – фиксированная область в плоскости (x, y) с границей $\delta\Sigma$, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к $\delta\Sigma$, \mathbf{U} – вектор консервативных переменных в единичном объеме. \mathbf{F} – тензор потоков массы, импульса и энергии газа через поверхность $\delta\Sigma$, который можно разложить на сумму невязкой и вязкой составляющих:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{inv} + \mathbf{F}^{vis}$$

Векторы \mathbf{U} , \mathbf{F}^{inv} являются функциями физических переменных \mathbf{Z} , вязкие потоки \mathbf{F}^{vis} – линейные функции производных от \mathbf{Z} по координатам x, y .

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{inv} = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v \\ p + \rho u^2 & \rho uv \\ \rho uv & p + \rho v^2 \\ \rho uh & \rho vh \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{vis} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \\ q_x & q_y \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Здесь p – давление, ρ – плотность, T – динамическая температура, u, v – компоненты вектора скорости \mathbf{V} . Выражения для полной энтальпии и внут-

ренной энергии единицы массы газа имеют вид:

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2}$$

Тензор вязких потоков импульса \mathbb{T} и суммарный поток тепла \mathbf{q} имеют вид:

$$\mathbb{T} = \|\tau_{ij}\| = -\mu \left(\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{I} \right)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \mathbb{T} \cdot \mathbf{V}$$

Здесь \mathbf{I} – единичный тензор, $\mathbf{r} = (x, y)$.

К уравнениям (6.1) добавляются граничные условия:

- в набегающем невозмущенном потоке: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty, p = p_\infty, T = T_\infty$
- на поверхности тела: $\mathbf{V} = 0, T = T_w$
- на выходной границе: мягкие граничные условия

Уравнения (6.1)-(6.2) решаются численно на структурированной криволинейной сетке методом конечного объема. Расчетная область разбивается двумя семействами сеточных линий на выпуклые четырехугольные ячейки, каждой из которых приписывается индекс (i, j) , вершины нумеруются индексами $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$, а грани – $(i \pm 1/2, j)$ и $(i, j \pm 1/2)$. Для всех четырехугольников определена площадь σ_{ij} и векторы $\mathbf{s}_{i\pm 1/2, j}, \mathbf{s}_{i, j\pm 1/2}$, совпадающие по направлению с внешней нормалью, а по величине равные длине соответствующей грани ячейки.

Запишем уравнения (6.1) в разностном виде, заменив интегралы по площади и контуру квадратурными формулами:

$$\sigma_{ij} \frac{\mathbf{U}_{ij}^{n+1} - \mathbf{U}_{ij}^n}{\Delta t} + \sum_{p=\substack{(i\pm\frac{1}{2}, j) \\ (i, j\pm\frac{1}{2})}} \Phi_p^{n+1} = 0 \quad (6.3)$$

$$\Phi_p = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{s}_p = \mathbf{F}_p^{inv} \cdot \mathbf{s}_p + \mathbf{F}_p^{vis} \cdot \mathbf{s}_p = \Phi_p^{inv} + \Phi_p^{vis}$$

Невязкие потоки Φ^{inv} через грани ячеек рассчитываются из точного решения задачи Римана. Так, например, для грани ячейки с номером p численный поток через эту грань дается формулой

$$\Phi_p^{inv} = \Phi(\mathbf{Z}_p^{\mathfrak{R}}), \quad \mathbf{Z}_p^{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\mathbf{Z}_p^L, \mathbf{Z}_p^R, \mathbf{s}_p)$$

Здесь \mathfrak{R} – оператор, отвечающий алгоритму решения задачи о распаде произвольного разрыва. Величины $\mathbf{Z}_p^{L,R}$ получены в результате одномерной экстраполяции физических переменных \mathbf{Z} из центров ячеек на грань с номером p слева и справа от нее соответственно. При этом используется лимитер типа «*minmod*». Аналогичный алгоритм с использованием односторонней аппроксимации применяется при расчете потоков на гранях, совпадающих с твердой поверхностью.

Численный вязкий поток Φ^{vis} через ту же грань рассчитывается с использованием центральных разностей или односторонних разностей на границах расчетной области со вторым порядком точности.

Введем матрицы Якоби, соответствующие двум координатным направлениям:

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \Phi^{1,2} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^{1,2}$$

$$\mathbf{s}^1 = 0.5(\mathbf{s}_{i-1/2,j} + \mathbf{s}_{i+1/2,j}), \quad \mathbf{s}^2 = 0.5(\mathbf{s}_{i,j-1/2} + \mathbf{s}_{i,j+1/2})$$

$$\mathbf{A} = \sum_{m=1,2} \mathbf{A}_m s_m$$

Для численного решения уравнений (6.3) построим двухслойную неявную конечно-разностную схему. Линеаризуем систему (6.3):

$$\left(\frac{\sigma_{ij}}{\Delta t} + \sum_{p=\substack{(i\pm\frac{1}{2},j) \\ (i,j\pm\frac{1}{2})}} (\mathbf{A}_p^+ + \Phi_p^{vis}) \right) \Delta \mathbf{U}_{i,j} + \sum_{p=\substack{q=\substack{(i\pm 1,j) \\ (i,j\pm 1)} \\ p=\substack{(i\pm\frac{1}{2},j) \\ (i,j\pm\frac{1}{2})}}} (\mathbf{A}_p^- + \Phi_p^{vis}) \Delta \mathbf{U}_q = 0 \quad (6.4)$$

$$\Delta \mathbf{U}_{i,j} = \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{U}_{i,j}^n$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}, \quad \mathbf{A}^{\pm} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{\pm} \mathbf{S}, \quad \mathbf{\Lambda}^{\pm} = 0.5(\mathbf{\Lambda} \pm |\mathbf{\Lambda}|)$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, составленная из собственных чисел якобиана \mathbf{A} , \mathbf{S} – матрица собственных векторов.

При вычислении приращений вязких потоков оставлены лишь слагаемые $\Delta \mathbf{U}_{i\pm 1,j}$, $\Delta \mathbf{U}_{i,j\pm 1}$ в то время как члены с $\Delta \mathbf{U}_{i\pm 1,j\pm 1}$ отброшены. Матрицы $\Phi_{i\pm 1/2,j}^{vis}$ и $\Phi_{i,j\pm 1/2}^{vis}$ рассчитываются на гранях по осредненным значениям $0.5(\mathbf{U}_{i,j} + \mathbf{U}_{i\pm 1,j})$ и $0.5(\mathbf{U}_{i,j} + \mathbf{U}_{i,j\pm 1})$.

Система разностных уравнений (6.4) является достаточно сложной, поскольку каждое из уравнений связывает приращения $\Delta \mathbf{U}_{i,j}$ в пяти соседних точках. Поэтому применен следующий алгоритм: на каждом временном слое в направлении j (вдоль направления возмущений) используется релаксационный метод Гаусса-Зейделя по линиям, а в направлении i – векторная трехточечная прогонка.

Литература

- [1] Арутюнян Г.М., Карчевский Л.В. Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973. 376 с.
- [2] Боровой В.Я. Течения газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. М.: Машиностроение, 1983. 141 с.
- [3] Боровой В.Я., Струминская И.В. Теплообмен на цилиндре, обтекаемом гиперзвуковым потоком, в зоне падения скачка уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. N 3. С. 117-123.
- [4] Ван Бо-И, Осипцов А.Н. Подъем пыли за движущейся ударной волной // Изв. РАН, МЖГ. 1998. N 3. С. 114-121.
- [5] Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. Москва: Физматлит, 2003. 192 с.
- [6] Василевский Э.Б., Домбровский Л.А., Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В. Теплообмен в окрестности точки торможения при сверхзвуковом обтекании тел гетерогенным потоком со скольжением фаз // ТВТ. 2001. Т. 39. N 6. С. 925-938.
- [7] Василевский Э.Б., Осипцов А.Н., Чирихин А.В., Яковлева Л.В. Теплообмен на лобовой поверхности затупленного тела в высокоскоростном потоке, содержащем малоинерционные частицы // ИФЖ. 2001. Т. 74. N 6. С. 29-37.
- [8] Волков А.Н., Циркунов Ю.М., Семенов В.В. Влияние моно- и полидисперсной примеси на течение и теплообмен при сверхзвуковом обтекании

затупленного тела потоком газозвеси // Мат. Моделирование. 2004. Т. 16. N 7. С. 6-12.

- [9] Волков А.Н., Циркунов Ю.М. Влияние дисперсной примеси на течение и теплообмен при поперечном обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком запыленного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. N 4. С. 68-85.
- [10] Гинзбург И.П. Аэрогазодинамика. М.: Изд. Высшая школа, 1966. 404 с.
- [11] Головачев Ю.П., Шмидт А.А. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком запыленного газа// Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. N 3. С. 73-77.
- [12] Давыдов Ю.М., Нигматулин Р.И. Расчет внешнего обтекания затупленных тел гетерогенным потоком с каплями или частицами// Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. N 1. С. 57-60.
- [13] Домбровский Л.А., Юкина Э.П. Критические условия инерционного осаждения частиц из газодисперсного потока в окрестности точки торможения // ТВТ. 1983. Т. 21. N 3. С. 525-531.
- [14] Домбровский Л.А. Инерционное осаждение частиц из газодисперсного потока в окрестности точки торможения // ТВТ. 1986. Т. 24. N 3. С. 558-562.
- [15] Егорова Л.А., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. О границах режима инерционного осаждения частиц и теплообмене при сверхзвуковом обтекании тел вязким запыленным газом // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 2001. N 6. С. 111-124.
- [16] Ивандаев А.И., Кутушев А.Г., Нигматулин Р.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газозвесах // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1981. Т. 16. С. 209-287.

- [17] Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления // ПММ. 1979. Т. 43. N 3. С. 500-510
- [18] Крайко А.Н. Сулайманова С.М. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с «пеленами» и «шнурками», возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. N 4. С. 619-630.
- [19] Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1972. Т. 6. С. 93-174.
- [20] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [21] Коробейников В.П., Марков В.В., Меньшов И.С. Задача о сильном взрыве в запыленном газе // Труды мат. инст. АН СССР. 1984. Т. 164. С. 104-107.
- [22] Марбл Ф. Динамика запыленных газов. В кн.: Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М.: 1971. N 6.
- [23] Меньшов И.С. Распространение сильных взрывных волн в дисперсной смеси // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. С. 808-811.
- [24] Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л. Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. М.: Янус-К, 2007. 392 с.
- [25] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [26] Осипцов А.Н. Развитие лагранжева подхода для моделирования течений дисперсных сред. В сб.: Проблемы современной механики. К 85-летию со дня рождения академика Г.Г. Черного. М.: Изд. МГУ, 2008. С. 390-407.

- [27] Осипцов А.Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках. // Изв. АН СССР МЖГ, 1984. N 3. С. 46-52.
- [28] Осипцов А.Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // МЖГ. 1985. N 5. С. 99-107.
- [29] Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г. Влияние медкодисперсной примеси на структуру пограничного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. N 5. С. 55-62.
- [30] Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г. Влияние мелкодисперсной примеси на структуру пограничного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. N 4. С. 85-92.
- [31] Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г. Обтекание сферы запыленным газом с большой сверхзвуковой скоростью // Исследование газодинамики и теплообмена сложных течений однородных и многофазных сред / под ред. Стулова В.П. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1990. С. 89-105.
- [32] Полежаев Ю.В., Репин И.В., Михатулин Д.С. Теплообмен в сверхзвуковом гетерогенном потоке // ТВТ. 1992, т. 30, N 6, с. 1147-1153.
- [33] Громов В.Г., Сахаров В.И., Фатеева Е.И. Применение модели частичного химического равновесия для исследования задач гиперзвуковой аэродинамики. Препринт N 58-2000. М.: Ин-т механики МГУ им. М.В. Ломоносова. 2000. 90 с.
- [34] Тетерин М.П. Исследование течения газа и теплопередачи в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. N 2. С. 143-147.
- [35] Тетерин М.П. Исследование течения газа в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. N 3. С. 92-97.

- [36] Циркунов Ю.М. Исследование инерционного осаждения полидисперсных частиц в критической точке сферы // ПМТФ. 1985. N 5. С. 94-102.
- [37] Циркунов Ю.М. Обтекание тел потоком газозвеси. Докторская диссертация, С.-Пб., 2005.
- [38] Циркунов Ю.М., Тарасова Н.В. О стратификации полидисперсной примеси в пограничном слое на нагретой поверхности вблизи критической точки // Моделирование в механике. 1990. Т. 4. N 2. С. 141-148. – Новосибирск: Изд-во ВЦ и ИТПМ СО АН СССР.
- [39] Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
- [40] Akhatov I.S., Hoey J.M., Swenson O.F., Schulz D.L. Aerosol flow through a long micro-capillary: collimated aerosol beam // Microfluid Nanofluid. 2008. V. 5. P. 215-224.
- [41] Akhatov I.S., Hoey J.M., Swenson O.F., Schulz D.L. Aerosol focusing in micro-capillaries: Theory and experiment // Aerosol Sci. 2008. V. 39. P. 691-709.
- [42] Akhatov I.S., Hoey J.M., Thompson D., *et al.* Aerosol flow through a micro-capillary // Proceedings of MNHMT2009 ASME 2009 2nd Micro/Nanoscale Heat & Mass Transfer International Conference December 18-22, 2009, Shanghai, China.
- [43] Aizik F., Ben-Dor G., Elperin T., *et al.* Attenuation law of planar shock waves propagating through dust- gas suspensions // AIAA J. 1995. V. 33. N 5. P. 953-955.
- [44] Ben-Dor G., Mond M., Igra O., Martsiano Y. A nondimensional analysis of dusty shock waves in steady flows // KSME J. 1988. V. 2. N 1. P. 28-34.

- [45] Ben-Dor G. Dusty shock waves - An update // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. N 10. P. 141-146.
- [46] Ben-Dor G., Igra O., Wang L. Shock Wave Reflections in Dust-Gas Suspensions // J. Fluids Eng. 2001. V. 123. P. 145-153.
- [47] Boiko V.M., Kiselev V.P., Kiselev S.P., Papyrin A.N., Poplavsky S.V., Fomin V.M. Shock wave interaction with a cloud of particles // Shock Waves. 1997. V. 7. N 5. P. 275-285.
- [48] Borovoy V.Ya., Chinilov A.Yu., Gusev V.N., Strminskaya I.V., Delery J., Chanetz B. Interference between a cylindrical bow shock and a plane oblique shock // AIAA J. 1997. V. 35. P. 1721-1728.
- [49] Carlson D.J., Hoglund R.F. Particle drag and heat transfer in rocket nozzles. // AIAA Journal, 1964. V.2. N 11. P.1980-1984.
- [50] Carrier G.F. Shock waves in a dusty gas // J. Fluid Mech., 1958. V. 4. P. 376-382.
- [51] Chang E.J., Kailasanath K. Shock wave interactions with particles and liquid fuel droplets // Shock Waves. 2003. V. 12. P. 333-341.
- [52] Crowe C.T. Review – Numerical models for dilute gas-particle flows // ASME J. Fluid Engineering. 1982. V. 104. P. 297-303.
- [53] Dahneke B., Flachsbarth H. An aerosol beam spectrometer // J. Aerosol Sci. 1972. V. 35. P. 345-349.
- [54] Dunbar L.E., Courtney J.F., McMillen L.D. Heating augmentation in erosive hypersonic environments // AIAA Journal. 1975. V. 13. N 7. P. 908-912.
- [55] Edney B.E. Anomalous Heat Transfer and Pressure Distributions on Blunt Bodies at Hypersonic Speeds in the Presence of an Impinging Shock // Aeronautical Research Inst. of Sweden, FFA Rept. 115, 1968.

- [56] Edney B.E. Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // AIAA J., 1968. V. 6. P. 15-21.
- [57] Elperin T., Ben-Dor G., Igra O. A parametric study of the head-on collision of normal shock waves in dusty gases // Fluid Dyn. Research. 1988. V. 4. P. 239-253.
- [58] Fedorov A.V., Kharlamova Yu.V., Khmel T.A. Reflection of a Shock Wave in a Dusty Cloud // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2007. V. 43. N 1. P. 104-113.
- [59] Fernandez De La Mora J., Riesco-Chueca P. Aerodynamic focusing of particles in carrier gas // J. Fluid Mech. V. 195. 1988. P. 1-21.
- [60] Fernandez-Feria R., Fernandez De La Mora J. Shock wave structure in gas mixtures with large mass disparity // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 21-40.
- [61] Fleener W.A., Watson R.H. Convective heating in dust laden hypersonic flow // AIAA Paper N 73-161. 1973.
- [62] Di Fonzo F., Gidwani A., Fan M.H., Neumann D., *et al.* Focused nanoparticle-beam deposition of patterned microstructures // Applied physics letters. 2000. V. 77. N 6. P. 910-912.
- [63] Gavrilenko T.P., Grigor'ev V.V. Shock wave propagation in an air suspension of solid particles // Fizika Goreniya i Vzryva, 1984. V. 20, N 1. P. 86-90.
- [64] Geng J.H., van de Ven A., Yu Q., Zhang F., Groenig H. Interaction of a shock wave with a two-phase interface // Shock Waves. 1994. V. 3. P. 193-199.
- [65] Geng J.H., Groenig H. Dust suspensions accelerated by shock waves // Experiments in Fluids. 2000. V. 28. P. 360-367.

- [66] Gaitonde D., Shang J.S. On the Structure of an Unsteady Type IV Interaction at Mach 8, *Computers and Fluids*, 1995. V. 24. N 4. P. 469-485.
- [67] Gottlieb J.J., Coskunes C.E. Effects of particle volume on the structure of a partly dispersed normal shock wave in a dusty gas // UTIAS Rept. N 295. University of Toronto, Feb. 1985.
- [68] Griffith W.C., Kenny A. On fully-dispersed shock waves in carbon dioxide // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 3. P. 286-288.
- [69] Guha A. Jump conditions across normal shock waves in pure vapour-droplet flows // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 241, P. 349-369
- [70] Hains F.D., Keyes J.W. Shock interference heating in hypersonic flows // *AIAA J.* 1972. V. 10. P. 1441-1447.
- [71] Hamad H., Frohn A. Structure of fully dispersed waves in dusty gases // *J. Appl. Math. Phys.* 1980. V. 31. P. 66-82.
- [72] Hamad H., El-Fayes F. Analytical solution for shock waves in dusty gases // *Acta Mechanica*, 1996. V. 119. P. 53-63
- [73] Healy D.P., Young J.B. Calculation of inertial-particle concentration using the Osipov Lagrangian method// In: *Proc. Intern. Conf. Multiphase Flow (ICMF'01)*, New-Orleans, USA, 2001. CD. P. 1-8.
- [74] Healy D.P., Young J.B. Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows// *Proc. Roy. Soc. A.* 2005, V.461, N 2059. P. 2197-2225.
- [75] Hove D. T., Taylor E. Stagnation region heat transfer in hypersonic particle environments // *AIAA Journal.* 1976. V. 14. N 10. P. 1486-1488.
- [76] Hove D.T., Shih W.C.L. Re-entry vehicle stagnation region heat transfer in particle environments // *AIAA Journal.* 1977. V. 15. N 7. P. 1002-1005.

- [77] Igra O., Ben-Dor G. Parameters Affecting the Relaxation Zone Behind Normal Shock Waves in Dusty Gases // Israel J. of Technology. 1980. V. 18. P. 159-168.
- [78] Igra O., Ben-Dor G. Dusty shock waves // Appl. Mech. Review. 1988. V. 41. N 11. P. 379-437.
- [79] Igra O., Hu G., Falcovitz J., Wang B.Y. Shock wave reflection from a wedge in a dusty gas // International Journal of Multiphase Flow, 2004. V. 30. P. 1139-1169
- [80] Ishii R., Hatta N., Umeda Y., Yuhi M. Supersonic gas-particle two-phase flow around a sphere // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 453-483.
- [81] Israel G.W., Fridlender S.K. High-speed beams of small particles // J. Colloid Interface Sci. 1967. V. 24. P. 330-337.
- [82] Kendall M.A.F. The delivery of particulate vaccines and drugs to human skin with a practical hand-held shock tube-based system // Shock Waves. V. 14. N 1. 2002. P. 22-30.
- [83] Kiselev V.P., Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V. Interaction of a shock wave with a particle cloud of finite size // Shock Waves. 2006. V. 16. P. 53-64.
- [84] Klopfer G.H., Yee H.C. Viscous Hypersonic Shock-on- Shock Interaction on Blunt Cowl Lips // AIAA Paper 88-0233, Reno, NV, Jan. 1988.
- [85] Kriebel A.R. Analysis of Normal Shock Waves in a Particle Laden Gas, J. Basic Eng., Transactions ASME, 1964. Ser D86. P. 655-663.
- [86] Liu P., Ziemann P.L., Kittelson P.L., McMurry P.H. Generating particle beams of controlled dimensions and divergence: I. Theory of particle motion in aerodynamic lenses and nozzle expansions // Aerosol Sci. Technol. V. 22. 1995. P. 293-313.

- [87] Liu P., Ziemann P.L., Kittelson P.L., McMurry P.H. Generating particle beams of controlled dimensions and divergence: I. Experimental Evaluation of Particle Motion in Aerodynamic Lenses and Nozzle Expansions // *Aerosol Sci. Technol.* V. 22. 1995. P. 314-324.
- [88] Martsiano Y., Ben-Dor G., Igra O. Oblique shock waves in dusty gas suspensions // *KSME J.* 1988. V. 2. N. 1. P. 35-43.
- [89] Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phis. of Fluids.* 1983. V. 26. P. 883.
- [90] P. Middha, A. S. Wexler Particle-Focusing Characteristics of Matched Aerodynamic Lenses // *Aerosol Sci. Technol.* 2005. V. 39. P. 222-230.
- [91] Miura H., Glass I.I. On a dusty-gas shock tube // *Proc. R. Soc. Lond.* 1982. V. 382. P. 373-388.
- [92] Miura H., Glass I.I. Oblique shock waves in a dusty-gas flow over a wedge // *Proc. R. Soc. Lond.* 1986. V. 408. P. 61-78.
- [93] Miura H., Glass I.I., Saito T. Shock wave reflection from a rigid wall in a dusty gas // *Proc. R. Soc. Lond.* 1986. V. 404. P. 55-67.
- [94] Morgenthaler J.H. Analysis of Two Phase Flow in Supersonic Exhausts // *Progress in Astronautics & Aeronautics*, 1962. V. 6. P. 145-171.
- [95] Murphy W.K., Sears G.W. Production of particulate beams // *J. Appl. Phys.* 1964. V. 35. P. 1986-1987.
- [96] Olim M., Ben-Dor G., Mond M., Igra O. A general attenuation law of moderate planar shock waves propagating into dusty gases with relatively high loading ratios of solid particles // *Fluid Dyn. Res.* 1990. V. 6. P. 185-199.
- [97] Osipov A.N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // *Astrophysics and Space Science.* 2000. V. 274. P. 377-386.

- [98] Osipov A.N., Veselyi S.L., Kulikovskii V.A., Wang B.Y. The flow structure of dilute gas-particle suspensions behind a shock wave moving along a flat surface // *Appl. Math. Mech.* 1991. V. 12. N 6. P. 531-538.
- [99] Otterman B., Levine S.L. Analysis of gas-solid particle flows in shock tubes // *AIAA J.* 1974. V. 12. N 5. P. 579-580.
- [100] J. Passig, K.-H. Meiwes-Broer, J. Tiggesbäumker. Collimation of metal nanoparticle beams using aerodynamic lenses // *Rev. Sci. Instruments.* 2006. V. 77. P. 293-304
- [101] Picciotto M., Marchioli C., Reeks M.W., Soldati A. Statistics of velocity and preferential accumulation of microparticles in boundary layer turbulence// *Nuclear Eng. Des.* 2005. V. 235. P. 1239-1249.
- [102] Quinlan N.J., Kendall M.A.F., Bellhouse B.J., Ainsworth R.W. Investigations of gas and particle dynamics in first generation needle-free drug delivery devices // *Shock Waves.* V. 10. N 142 p.6. 2001. P. 395-404.
- [103] Quta E., Tajima K., Morii H. Experiments and analyses on shock waves propagating through a gas-particle mixture // *Bull. JSME.* 1976. V. 19. N 142 p.130. P. 384-394.
- [104] Rudinger G. Some Properties of Shock Relaxation in a Gas Flow Carrying Small particle // *Phys. Fluids,* 1964. V. 7. P. 658-663.
- [105] Rudinger G. *Fundamentals of gas-particle flow.* Amsterdam: Elsevier. 1980. 142 p.
- [106] Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // *J. Fluid Mech.* 1965. V.22. P. 385-400. Corrigendum: *J. Fluid Mech.* 1968. V.31. P. 624.
- [107] Saito T., Marumoto M., Takayama K. Numerical investigations of shock waves in gas-particle mixtures // *Shock Waves,* 2003. V. 13. P. 299-322.

- [108] Sommerfeld M. The unsteadiness of shock waves propagating through gas-particle mixtures // *Experiments in Fluids*. 1985. V. 3. P. 197-206.
- [109] Slater S.A., Young J.B. The calculation of inertial particle transport in dilute gas-particle flows // *Int. J. Multiphase Flow*. 2001. V. 27. P. 61-87.
- [110] Srivastava R.S., Sharma J.P. Structure of normal shock waves in a gas-particle mixture // *J. of Applied Mathematics and Physics*. 1982. V. 33. P. 819-825.
- [111] Tafreshi H.V., Benedek G., Piseri P., Vinati S., Barborini E., Milani P. A simple nozzle configuration for the production of low divergence supersonic cluster beam by aerodynamic focusing // *Aerosol Sci. Technol.* 2002. V. 36. N 5. P. 593-606.
- [112] Tannehill J.C., Hoist T.L., Rakich J.V., and Keyes J.W. Comparison of Two-Dimensional Shock Impingement Computation with Experiment// *AIAA Journal*, 1976. V. 14. N 4. P. 539-541.
- [113] Tsirkunov Yu.M., Volkov A.N., Tarasova N.V. Full Lagrangian approach to the calculation of dilute dispersed phase flows: advantages and applications // *ASME 2002 Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Quebec, Canada, July 14–18, 2002. – CD-ROM Proc. ASME FEDSM'02*, paper N 31224, 14 p.
- [114] Tsirkunov Yu.M. Gas-particle flows around bodies – key problems, modeling and numerical analysis // *Proc. 4th Int. Conf. Multiphase Flow ICMF-2001*, May 27 – June 1, 2001, New Orleans, USA. – CD ROM Proc. ICMF'2001, paper N 609, 31 p.
- [115] Van Donger M. *Shock Wave Science and Technology Reference Library. Multiphase Flows I*. Springer, Berlin Heidelberg, New York. 2007. V. 1. Part II. P. 135-186.

- [116] Volkov A.N., Tsirkunov Yu.M., Oesterlé B. Numerical simulation of a supersonic gas-solid flow over a blunt body: The role of inter-particle collisions and two-way coupling effects // *Int. J. of Mult. Flow.* 2005. V. 31. P. 1244-1275.
- [117] Wegner K., Piseri P., Vahedi Tafreshi H., Milani P. Cluster beam deposition: a tool for nanoscale science and technology // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2006. V. 39. P. R439-R459.
- [118] Wang X., Kruis F.E., McMurry P.H. Aerodynamic Focusing of Nanoparticles: I. Guidelines for Designing Aerodynamic Lenses for Nanoparticles // *Aerosol Sci. Technol.* 2005. V. 39. P. 611-623.
- [119] Wang B.Y., Xiong Y., Qi L.X. Shock-induced near-wall two-phase flow structure over a micron-sized particles bed // *Shock Waves.* 2006. V. 15. N5. P. 353-373.
- [120] Wieting A.R., Holden M.S. Experimental Shock-Wave Interference Heating on a Cylinder at Mach 6 and 8 // *AIAA J.*, 1989. V. 27. N. 11. P. 1557-1565.
- [121] Young J. B., Guha A. Normal shock-wave structure in two-phase vapour-droplet flows // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 228. P. 243-274.
- [122] Zhang X., Smith D.R., Worsnop D.R., Jimenez J., *et al.* A numerical characterization of particle beam collimation by an aerodynamic lens-nozzle system: I. An individual lens or nozzle // *Aerosol Sci. Technol.* V. 36. 2002. P. 617-631.
- [123] Zhang X., Smith D.R., Worsnop D.R., Jimenez J., *et al.* Numerical Characterization of Particle Beam Collimation: Part II Integrated Aerodynamic-Lens–Nozzle System // *Aerosol Sci. Technol.* V. 38. 2004. P. 619-638.

РАБОТЫ АВТОРА:

- [124] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в области пересечения ударных волн // Изв. РАН, МЖГ. 2007. N4. С. 107-116.
- [125] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Взаимодействие скачков уплотнения в запыленном газе и возникновение волн с полной дисперсией // Изв. РАН, МЖГ. 2010. N1. С. 70-83.
- [126] Голубкина И.В., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. Взаимодействие головной ударной волны с косым скачком уплотнения в гиперзвуковом потоке запыленного газа // Изв. РАН, МЖГ. 2011. N1. (в печати)
- [127] Голубкина И. В. Взаимодействие ударных волн в запыленном газе // Труды конференции - конкурса молодых ученых 12-17 октября 2005. Изд. Моск. унив., 2006. С. 143-150.
- [128] Голубкина И.В. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в зонах взаимодействия ударных волн // Труды конференции - конкурса молодых ученых 11-16 октября 2006 г. Изд. Моск. унив., 2007. С. 39-46.
- [129] Голубкина И.В. Возникновение волн с полной дисперсией при взаимодействии ударных волн в запыленном газе // Труды конференции - конкурса молодых ученых 14-17 октября 2009 г. Изд. Моск. унив., 2010. С. 42-49.
- [130] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц за точкой взаимодействия ударных волн // Тезисы конференции «Ломоносовские чтения». Секция механики. Апрель 2007 г. С. 58-59.
- [131] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Исследование волн с полной дисперсией в запыленном газе // Тезисы конференции «Ломоносовские чтения». Секция механики. Изд. Моск. унив., 2009. С. 52.

- [132] Голубкина И.В., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. Взаимодействие головной ударной волны с косым скачком уплотнения в гиперзвуковом потоке запыленного газа // Тезисы конференции «Ломоносовские чтения». Секция механики. Изд. МГУ. 2010. С. 38.
- [133] Голубкина И.В. Исследование эффекта фокусировки частиц при взаимодействии ударных волн в запыленном газе // Тезисы XV школы - семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики», Сентябрь 2007 г. Изд. МГУ. 2007. С. 36-37.
- [134] Голубкина И.В., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. Обтекание цилиндра гиперзвуковым потоком запыленного газа при наличии косоугольного скачка уплотнения, взаимодействующего с головной ударной волной // Тезисы XVI школы - семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики», Сентябрь 2010 г. Изд. МГУ. 2010. С. 35-36.
- [135] Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Взаимодействие ударных волн и волн с полной дисперсией в запыленном газе // Тезисы конференции IX международной школы-семинара «Модели и методы аэродинамики», г. Евпатория, 4-13 июня 2009 г. С. 56-57.
- [136] Голубкина И.В. Фокусировка инерционных частиц за точкой пересечения скачков уплотнения // Труды института механики УНЦ РАН. 2007. Т. 5. С. 145-150.
- [137] Osiptsov A.N., Golubkina I.V., Lebedeva N.A. Investigation of particle accumulation zones in disperse flows. CD of Proc. The 19th Intern. Sym. on Transport Phenomena. 2008. Iceland, Reykjavik. P. 1-7.
- [138] Голубкина И.В. Эффект фокусировки частиц за точкой пересечения скачков уплотнения // Труды научно-технической конференции «Будущее авиационной науки», ЦАГИ, 27 ноября 2008 г. С. 88-92.

- [139] Голубкина И.В. Оптимальные режимы фокусировки инерционных частиц в области взаимодействия ударных волн // Сборник трудов XVII школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях», 25-29 мая 2009. С. 194-197.
- [140] Голубкина И.В. Исследование эффекта фокусировки частиц в области пересечения скачков уплотнения // Тезисы Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100-летию со дня рождения Л.И. Седова. 12-14 ноября 2007 г. С. 45-47.
- [141] Голубкина И.В. Оптимальные режимы фокусировки инерционных частиц в области взаимодействия ударных волн // Тепловые процессы в технике. Изд. «Наука и технологии». 2009. N 11. С. 473-476.
- [142] Голубкина И.В. Взаимодействие волн сжатия в запыленном газе // Сб. «Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского». Казань. 2009. Том 39. С. 173-174.