

**X Всероссийский съезд по фундаментальным
проблемам теоретической и прикладной
механики**

24-30 августа 2011 г., Нижний Новгород

**Гравитационная конвекция дисперсных
систем в сосудах с наклонными стенками**

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
лаборатория многофазных сред
Невский Ю.А.
nevskii_u@mail.ru*

СОДЕРЖАНИЕ

- Мотивация
- Формулировка проблемы
- Общая гидродинамическая модель гравитационной конвекции
- Частные случаи “медленной” конвекции в “больших” сосудах
- Примеры численного моделирования эффекта Бойкотта и возникновения вихрей
- Примеры неустойчивости типа Рэля – Тейлора и возникновения расслоений в среде частиц
- Выводы

ПРИМЕРЫ ГРАВИТАЦИОННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ФАЗ И ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРИРОДЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ



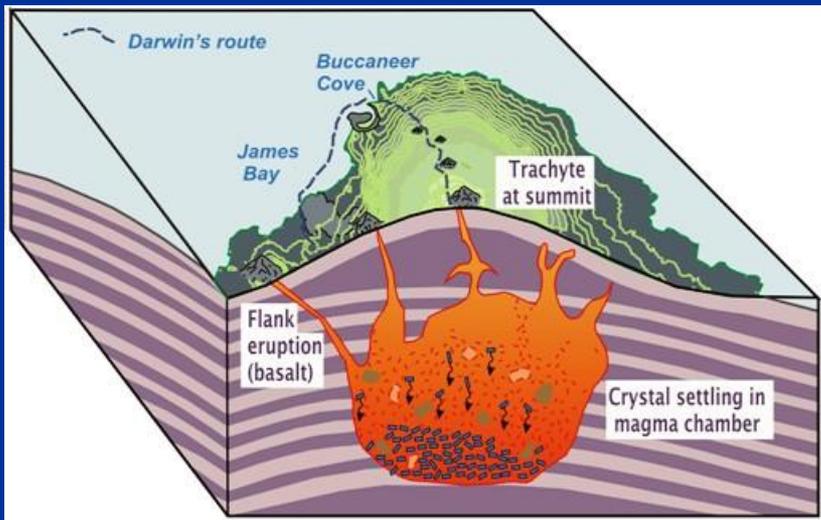
Пузырьковые колонны, очистка воды, очистители «lamella» и т.д.



Частицы проппанта



Транспорт проппанта при гидроразрыве



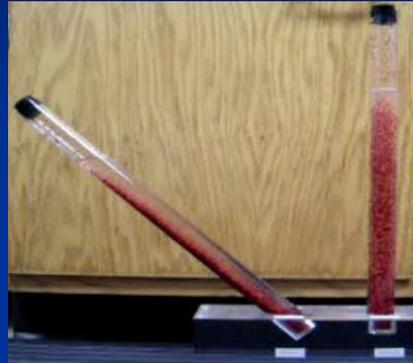
Конвекция в магматических очагах

ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
Разделение компонент биологических жидкостей в медицинских приложениях
Фракционирование гранулированных материалов в отстойниках
И т.д.

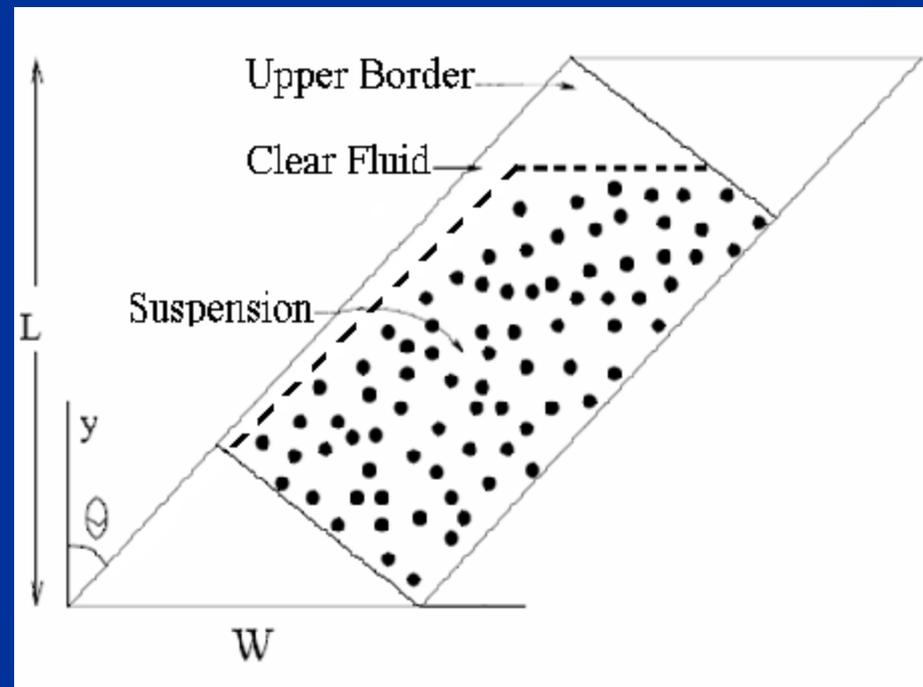
Эффект Бойкотта (Nature, 1920, Vol. 104)



Arthur Edwin Boycott, FRS
1877-1938

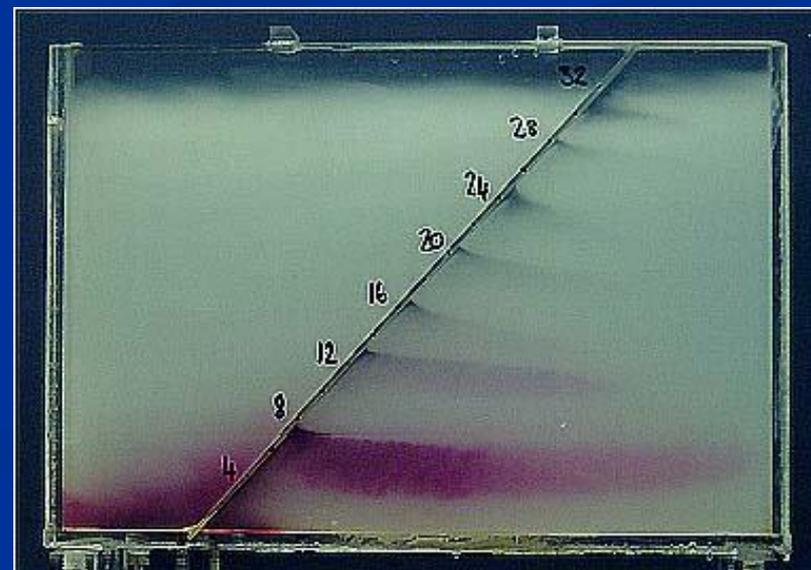
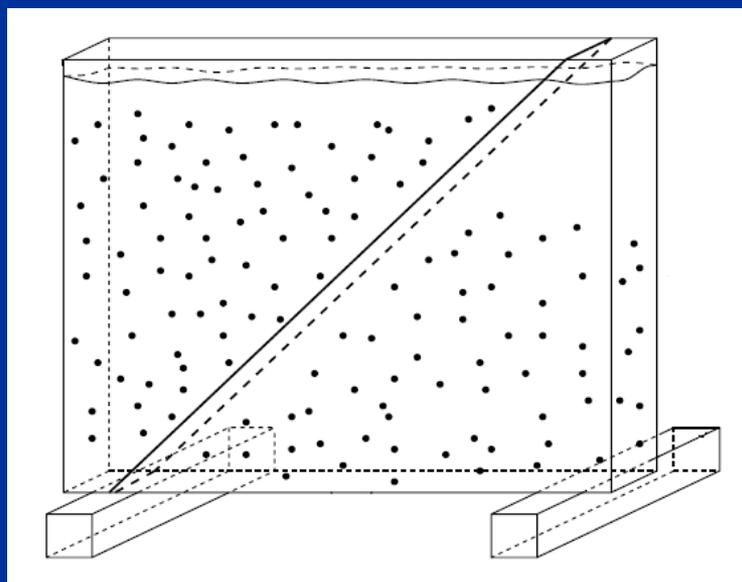
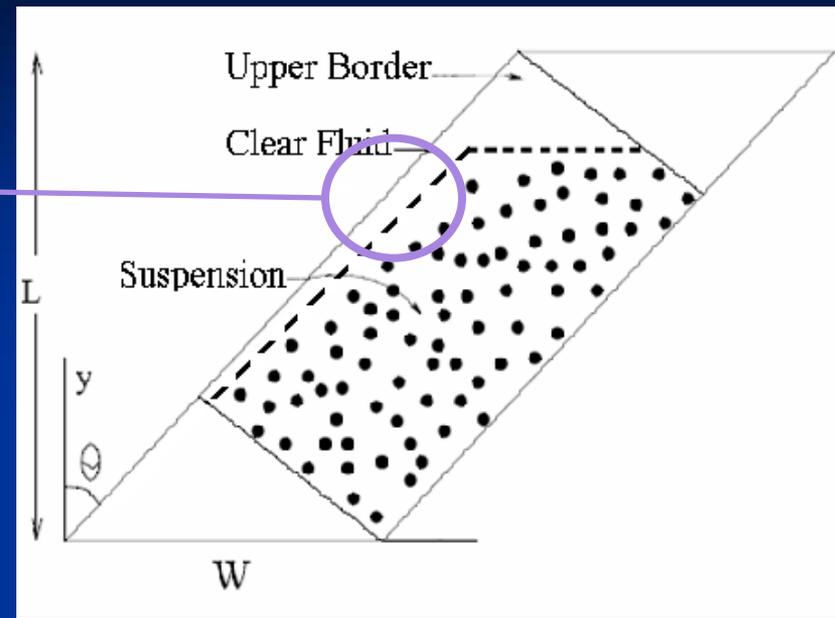
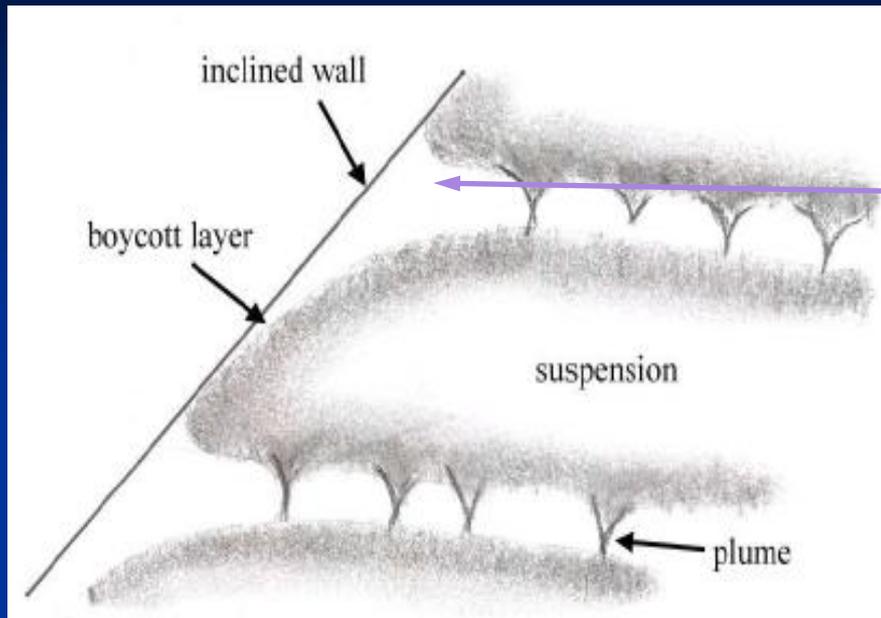


Улучшение осаждения эритроцитов в крови в наклонных сосудах



Задачи для математического моделирования

(рисунки взяты из работ F.A. Blanchette et. al. 2002-2005, JFM, 2005, Vol. 529)



Двухконтинуальный подход

Уравнения баланса массы и импульса для i -ой фазы:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho_i d\tau = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho_i \mathbf{v}_i d\tau = \oint_{\Sigma(t)} \mathbf{P}_i^n d\sigma + \int_{\tau(t)} \rho_i \mathbf{F}_i d\tau + \int_{\tau(t)} \mathbf{P}_{ij} d\tau$$

Обозначения:

\mathbf{P}_i^n – тензор напряжений в фазе i , \mathbf{P}_{ij} – обмен импульсом между фазами i и j

- Несущая фаза – несжимаемая ньютоновская жидкость
- Дисперсная фаза – континуум не взаимодействующих сферических частиц
- На масштабе частицы число Рейнольдса мало

(Maxey M.R., Riley J.J., 1983):

$$\mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma\mu (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \quad \mathbf{f}_A = \rho\tau_s \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g} \right)$$

$$m \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_{vm} + \mathbf{f}_{BB} + m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{f}_{vm} = \rho\tau_s \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right)$$

$$\mathbf{f}_{BB} = 6\sigma^2 \sqrt{\pi\mu\rho} \int_0^t \left(\frac{d_s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)}{dt_1} \right) \frac{dt_1}{\sqrt{t - t_1}}$$

Основная математическая модель в безразмерной форме

Параметры частиц:
 \mathbf{v}_s – скорость
 m_s – масса
 σ – радиус
 c – объемная концентрация
 ρ_s – плотность

Параметры жидкости:
 \mathbf{v} – скорость
 μ – вязкость
 ρ – плотность

Масштабы:

U – стоксовская скорость оседания
 L – высота сосуда
 c_m – доля частиц в максимальной упаковке
 l_t – длина скоростной релаксации частиц

$$U = \frac{m_s g (1 - \eta)}{6\pi\sigma\mu}, \quad l_t = \frac{m_s U}{6\pi\sigma\mu}$$

$$\beta = \frac{L}{l_t}, \quad \eta = \frac{\rho}{\rho_s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad \text{Sh} = \frac{L}{U l_t}$$

$$\text{div} ((1-c)\mathbf{v} + c\mathbf{v}_s) = 0, \quad \text{Sh} \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} (c\mathbf{v}_s) = 0$$

$$(1-c) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{c}{\eta} \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_0(c) \tau_{ij} \mathbf{k}_i - \frac{\beta c}{1-\eta} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \mathbf{j}, \quad \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{f}_s - \frac{\beta \mathbf{j}}{1-\eta}$$

$$\mathbf{f}_s = \beta \varphi_1(c) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \varphi_2(c) \beta \chi \int_0^t \left(\frac{d_s \mathbf{v}}{d\tau} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{d\tau} \right) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \varphi_3(c) \frac{\eta}{2} \left(\frac{d_s \mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) \chi = \sqrt{\frac{9\eta}{2\pi\beta}}$$

$$+ \varphi_4(c) \eta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\beta \mathbf{j}}{|1-\eta|} \right), \quad \lim_{c \rightarrow 0} \varphi_{1-4}(c) = 1, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v}$$

$$\alpha n_{s0} = \frac{c_0}{\eta}$$

Типичные значения основных параметров

No	α	β	η	Re	$A = \alpha\beta Re$
1	0.010	$4.419 \cdot 10^8$	0.415	15.715	$6.944 \cdot 10^7$
2	0.010	$2.650 \cdot 10^8$	0.261	1.085	$2.877 \cdot 10^6$
3	0.001	$6.338 \cdot 10^5$	0.462	9.130	5787
4	0.001	$4.523 \cdot 10^7$	0.992	0.131	5943
5	$0.1 \cdot 10^{-3}$	$2.392 \cdot 10^7$	0.995	2.632	6296
6	0.010	12009	0.999	52.640	6321

No	σ [m*]	ρ [kg/m ³]	ρ_s [kg/m ³]	μ [kg/(m·sec)]	L [m]	$U = \frac{mg(1-\eta)}{6\pi\sigma\mu}$ [m/sec]
1	$4.10 \cdot 10^{-6}$	1100	2650	0.001	0.25	$57.1 \cdot 10^{-6}$
2	$16.0 \cdot 10^{-6}$	1100	4200	0.021	0.25	$82.9 \cdot 10^{-6}$
3	$90.0 \cdot 10^{-6}$	1250	2700	0.023	0.15	$1.12 \cdot 10^{-3}$
4	$130 \cdot 10^{-6}$	1250	1260	0.023	0.15	$16.1 \cdot 10^{-6}$
5	$40.0 \cdot 10^{-6}$	1000	1005	0.001	0.15	$17.5 \cdot 10^{-6}$
6	$40.0 \cdot 10^{-6}$	1000	1001	0.001	0.15	$351 \cdot 10^{-6}$

*(1 micron = 10^{-6} m)

Упрощение модели для случая «медленной» гравитационной конвекции в «больших*» сосудах

*
По сравнению с
длиной
скоростной
релаксации
частиц

$$\text{Re} \ll 1, \beta \gg 1, c_0 \sim O(1), \text{Re} \frac{c_0 \beta}{\eta} = A \sim O(1)$$

Нулевая объемная доля,
малые числа Рейнольдса

$$\text{Re} \ll 1$$

$$\beta \gg 1, \frac{c_0}{\eta} = \alpha \ll 1, \alpha \beta \text{Re} \sim O(1)$$

Конечная объемная доля,
малые числа Рейнольдса

$$\text{Re} \ll 1$$

$$\beta \gg 1, c_0 / \eta = \alpha \sim O(1), \text{Re} \frac{c_0 \beta}{\eta} \sim O(1)$$

Частные предельные случаи

Нулевая объемная доля, малые числа Рейнольдса

Похожая модель известна в литературе с 1977 г. (Hill W.D. et al., 1977)

$$\text{Re} \ll 1, \quad \beta \gg 1, \quad \alpha \ll 1, \quad \text{Sh} = 1, \quad \alpha\beta \text{Re} = O(1)$$

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d_s n_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{j}, \quad 0 = -\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v} - A n_s \mathbf{j}$$

$$A = \frac{\alpha\beta \text{Re}}{1-\eta}$$

Конечная объемная доля, малые числа Рейнольдса

$$\beta \gg 1, \quad \text{Re} \ll 1, \quad \frac{c_0}{\eta} \sim O(1), \quad \frac{c_0 \beta \text{Re}}{\eta} = A \sim O(1), \quad \text{Sh} = 1$$

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial c f}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \mathbf{v}_s) = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - f(c, \eta) \mathbf{j}, \quad f(c, \eta) = \frac{1 - \eta \varphi_3(c)}{\varphi_1(c)(1 - \eta)}$$

$$\nabla p_1 = \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_0(c) \tau_{ij} \mathbf{k}_i - A \frac{c}{c_0} \mathbf{j}, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div}(\mathbf{v})$$

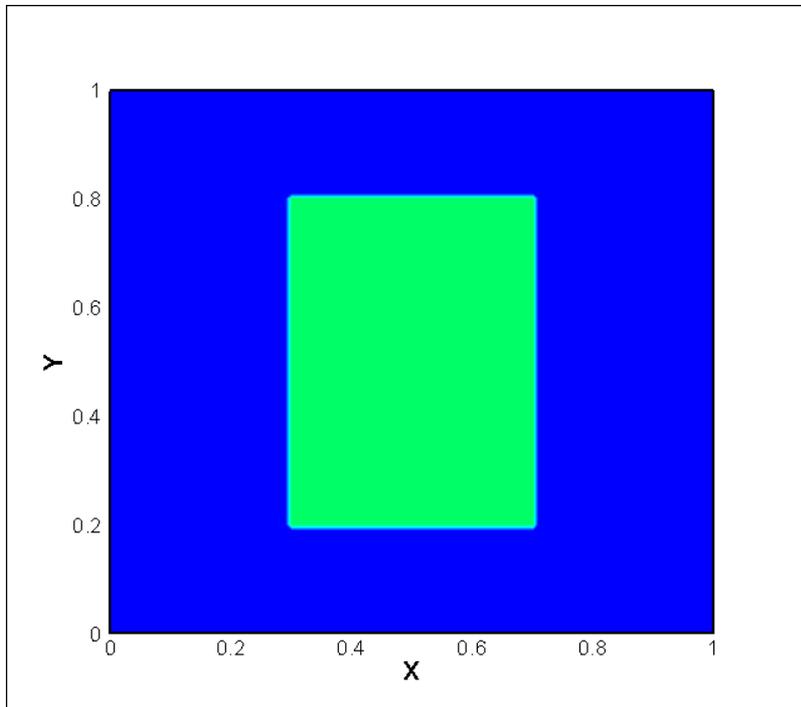
$$\varphi_1(c) = \left(1 - \frac{c}{0.58}\right)^{-3.1}, \quad \varphi_3(c) = 1 \quad (*) \varphi_0(c) = 1 + \frac{5}{2} c,$$

$$A = \frac{\beta \text{Re} c_0}{\eta}$$

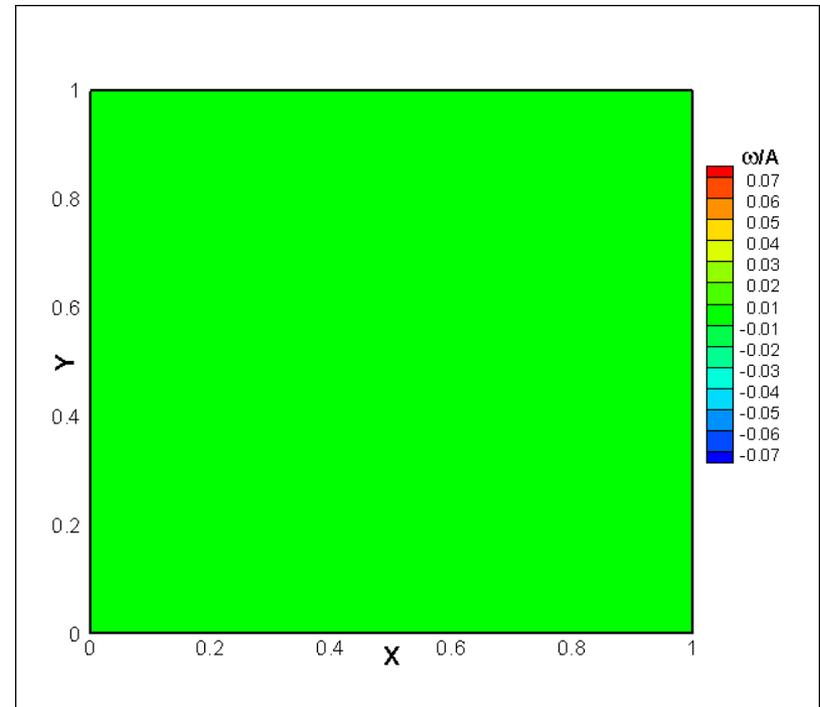
R. Buscal et al. 1982

2D численное моделирование. Оседание облака частиц. Пример генерации вихрей

$A=6000$

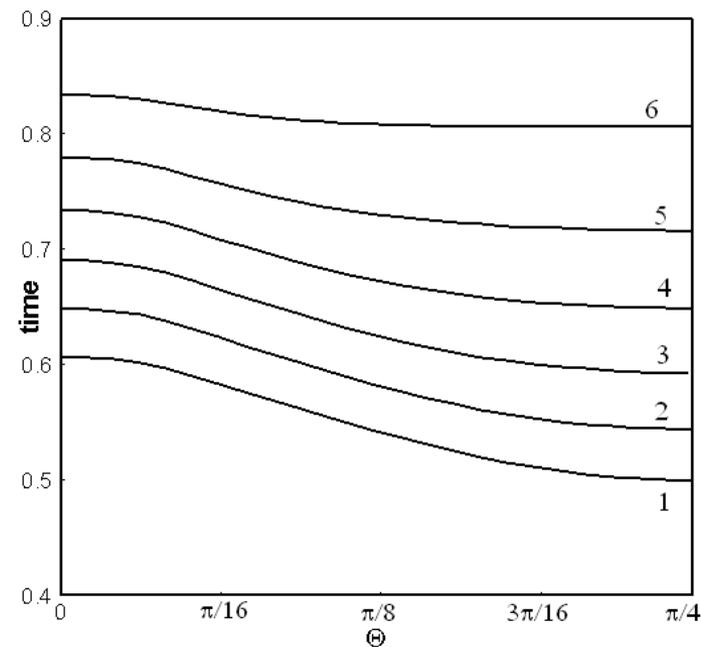
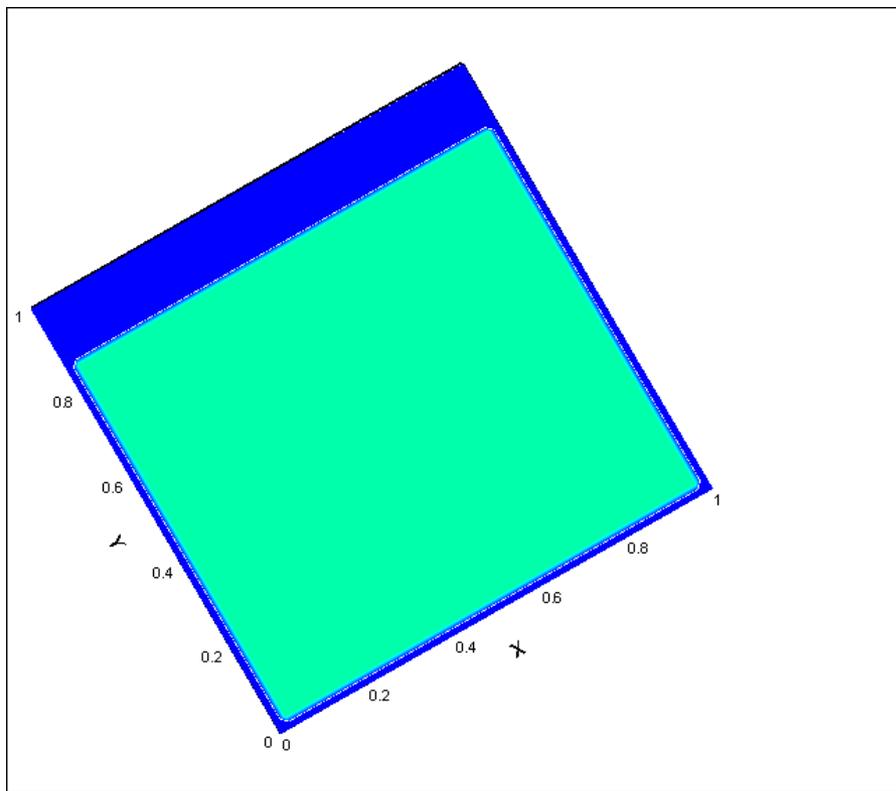


Форма облака частиц



Вихревое поле

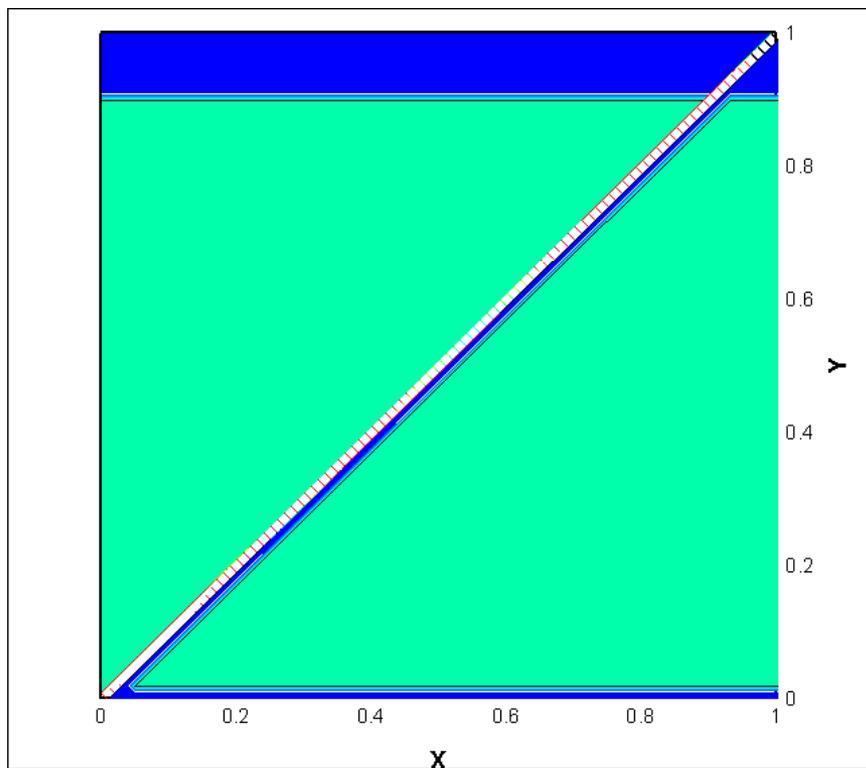
Эволюция облака частиц в наклонном сосуде. Оптимальные углы наклона



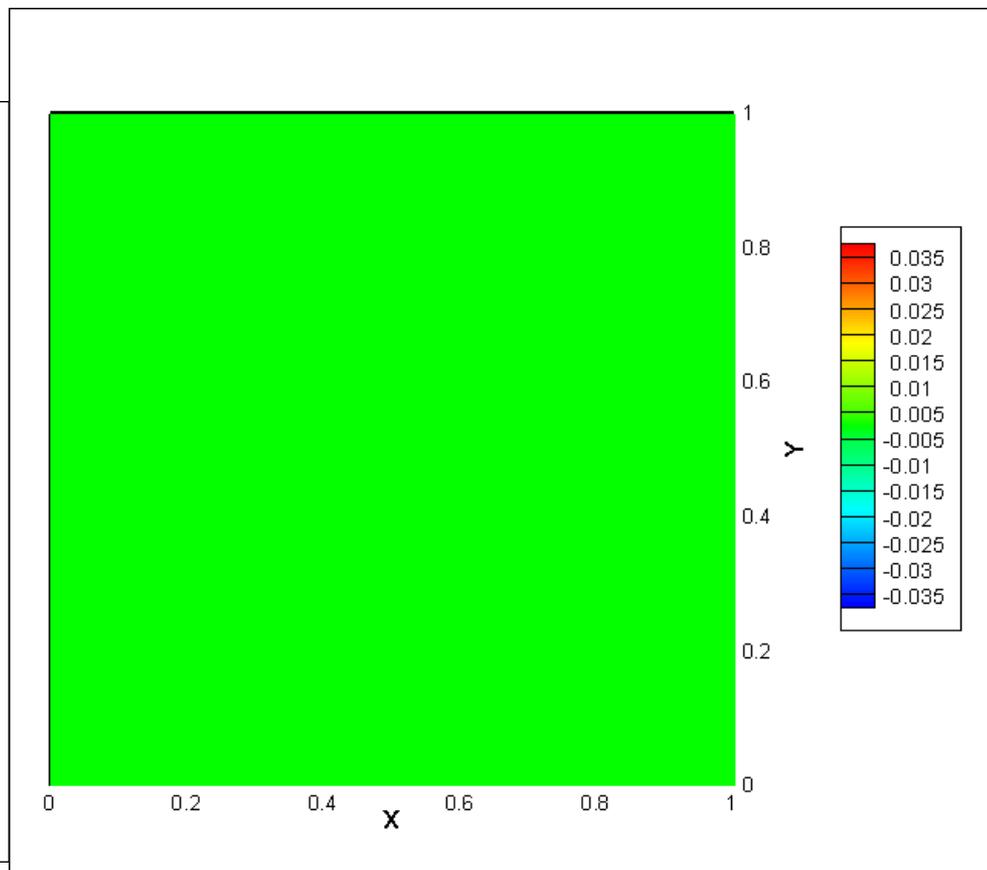
Эволюция поля концентрации частиц при $A=600$ и угле наклона $\Theta=\pi/6$.
 Время, необходимое для уменьшения начальной массы взвешенных частиц $M(0)$ до значений 30, 25, 20, 15, 10, и 5% (кривые 1-6) в зависимости от угла наклона θ (рад.) при $A = 6000$.

$$M(t) = \int_{\Sigma} n_s d\sigma, \quad M(0) = \int_{\Sigma} n_{s0} d\sigma$$

Численное моделирование осаждения примеси в сосуде, разделенном непроницаемой перегородкой



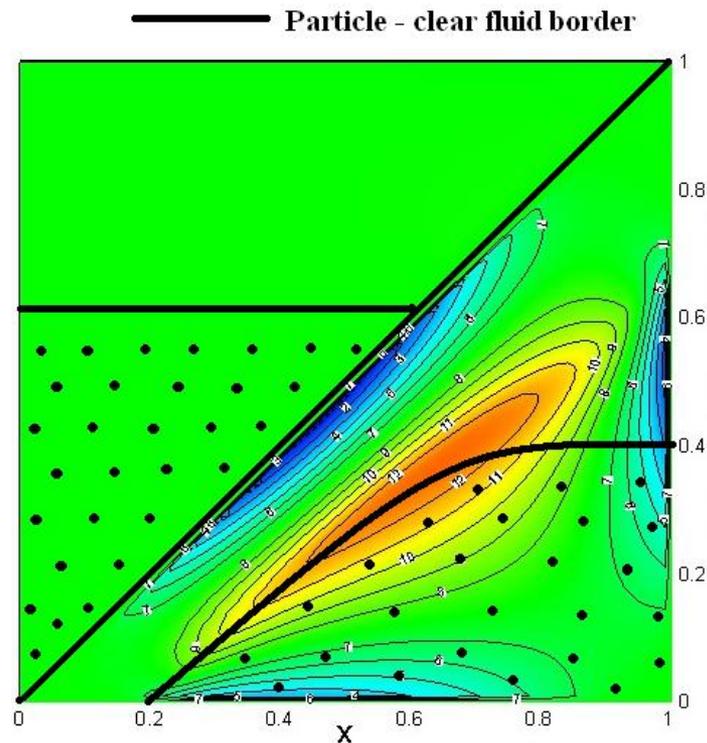
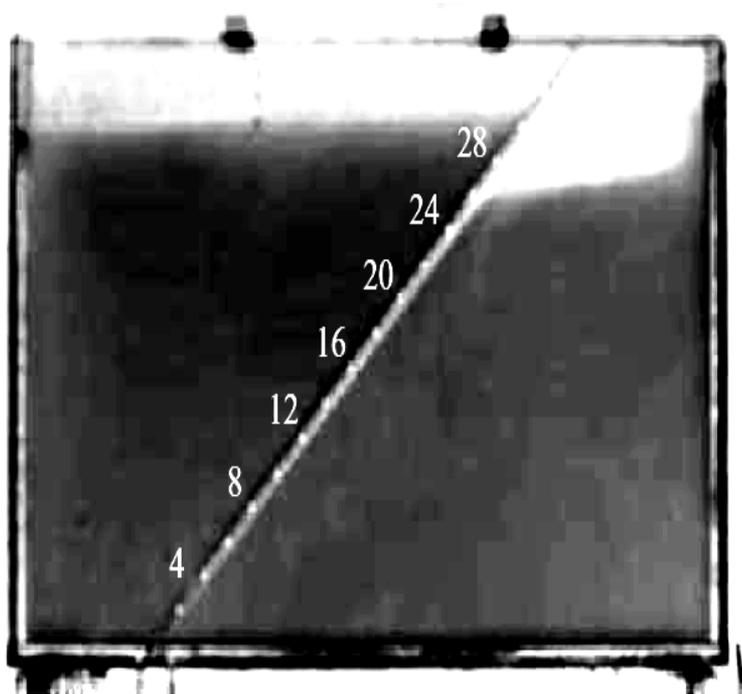
Концентрация



Вихревое поле

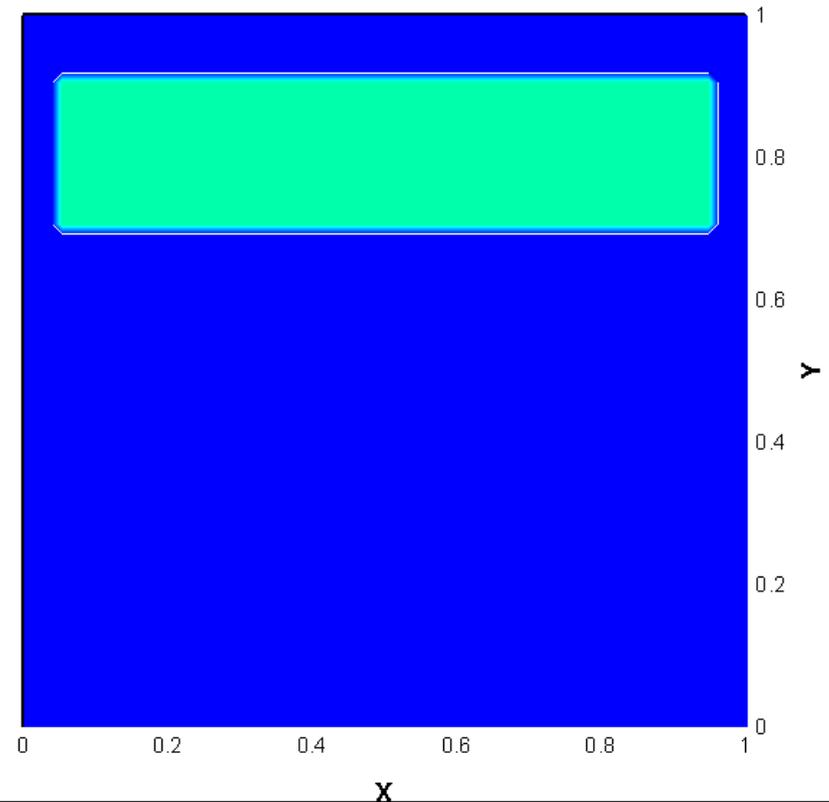
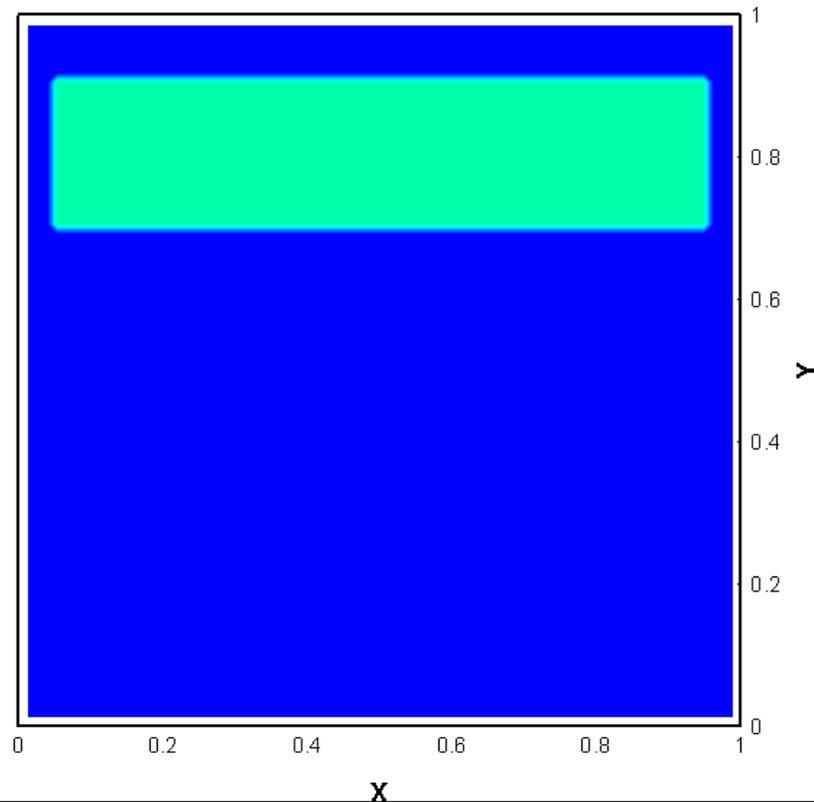
$$A = 600$$

Объяснение эффекта Бойкотта – возникновение интенсивной вихревой зоны под диагональной перегородкой



**Вихрь таков, что поток чистой жидкости
направлен вверх, а поток суспензии – вниз.**

Сравнение гравитационной конвекции суспензий с конечной и нулевой объемной долей частиц



Конечная объемная

доля
 $c_0=0.05$

Нулевая объемная

доля

$A=6000$

ВЫВОДЫ

Построена общая гидродинамическая модель гравитационной конвекции дисперсной среды.

Определен полный набор параметров, управляющих процессом гравитационной конвекции.

Сформулирован частный случай модели, соответствующий «медленной» гравитационной конвекции в «больших» сосудах.

Представлены примеры моделирования гравитационной конвекции суспензий в двумерном приближении. Получено качественное совпадение между расчетами и известными экспериментами.

Получено, что с увеличением коэффициента плавучести эффект Бойкотта становится более сильным. Показано, что эффект Бойкотта вызван образованием вихрей под наклонной стенкой. Для увеличения эффективности разделения фаз в наклонных сосудах необходимо создавать неоднородное распределение частиц в продольном направлении.

Получено, что учет в модели конечности объемной доли проявляется в эффекте изменения концентрации примеси вдоль лагранжевой траектории частицы и зависимости эффективной вязкости и скорости осаждения суспензии от концентрации. Для случая учета конечности объемной доли примеси диапазон оптимальных углов наклона сосуда существенно меняется.