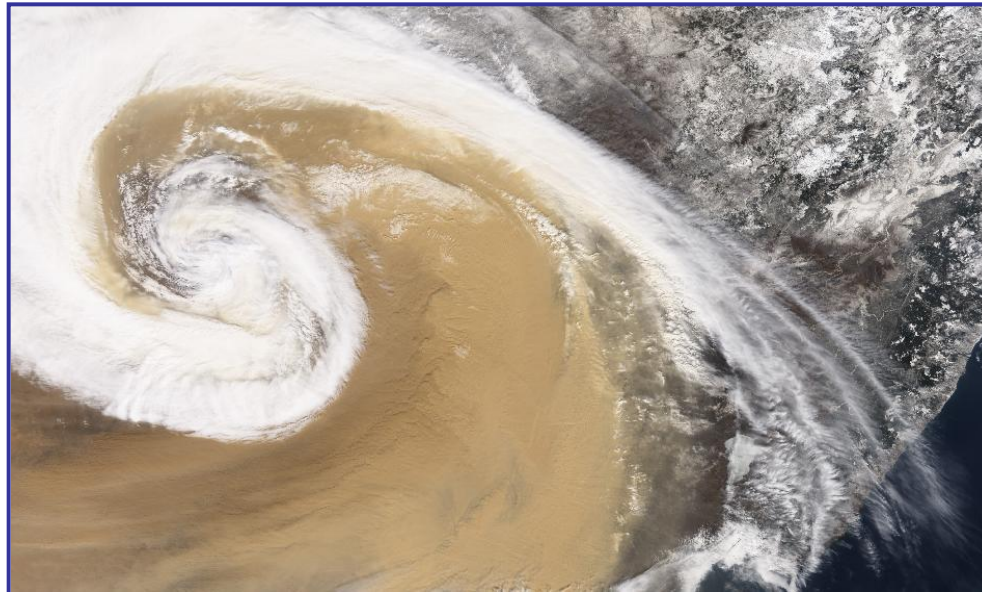


*Х Всероссийский съезд
по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики
24 – 30 августа 2011 г.*

Развитие лагранжева подхода для исследования дифференциальных характеристик полей пассивной примеси

Н.А. Лебедева

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
lebedeva@imec.msu.ru*



Введение

Пассивный скаляр – физическая величина, не влияющая на поле скорости основного потока.

В качестве пассивного скаляра могут выступать
(в случае преобладания конвективного переноса над диффузией):

- Концентрация безынерционной дисперсной примеси
- Плотность
- Температура
- Завихренность
- Заряд
- Компоненты магнитного поля и др.

Области приложения:

- Моделирование двухфазных течений с дисперсной примесью.
- Природные стратифицированные течения в океане и атмосфере.
- Промышленные механизмы перемешивания примесей.
- Экспериментальные теневые методики, визуализирующие поле градиента плотности неоднородных жидкостей:
 - Течение стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска при $Fr \gg 1$;
 - Сохранение плотности вдоль траектории.

1. Определяющие уравнения метода для случая переноса пассивного скаляра без проскальзывания

1.1. Уравнения для градиента пассивного скаляра в лагранжевых координатах

$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ – поле скорости пассивного скаляра совпадает с известным полем скорости среды в эйлеровых координатах.

$\nabla \rho_s = \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial x}, \frac{\partial \rho_s}{\partial y}, \frac{\partial \rho_s}{\partial z} \right)$ – градиент пассивного поля по эйлеровым координатам, известный в некоторой области течения G в момент $t = 0$: $\nabla \rho_{s0}(\mathbf{r})$.

$\nabla \rho_s(t) - ?$ Ищем $\nabla \rho_s(t)$ в лагранжевых координатах (t, \mathbf{r}_0) , где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – точки области G .

Уравнения в лагранжевых координатах для градиента:

$$\nabla \rho_s = J^{-1} \nabla_0 \rho_s$$

– уравнение эволюции градиента вдоль траекторий, где $\nabla_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i0}} \right)$

$$\frac{dJ_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{j0}}$$

– ОДУ для определения компонент якобиана $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

– ОДУ для определения траекторий жидких частиц

$$i, j = 1, 2, 3$$

Начальные условия:

$$t = 0: \quad x_i = x_{0i} \quad J_{ij} = \delta_{ij}$$

12+3=15 уравнений

1.2. Примеры дополнительных уравнений для $\nabla_0 \rho_s$

1. Скалярная величина сохраняется вдоль траектории

$$\rho_s(t, \mathbf{r}_0) = \rho_{s0}(\mathbf{r}_0) \Rightarrow$$

$$\nabla_0 \rho_s = \nabla_0 \rho_{s0}$$

Общее число уравнений – 15

2. Для скалярной величины справедливо уравнение неразрывности

$$\rho_s \det(J) = \rho_{s0} \Rightarrow$$

$$\nabla_0 \rho_s = \frac{\nabla_0 \rho_{s0} - \rho_s \nabla_0 \det(J)}{\det(J)}$$

Член $\nabla_0 \det(J)$ содержит величины

$$K_{ijk} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_{k0}} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_{j0} \partial x_{k0}}$$

$$\frac{dK_{ijk}}{dt} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{j0} \partial x_{k0}}$$

Начальные условия: $t = 0$: $K_{ijk} = 0$

Общее число уравнений
15+3+27= 45

3. Другие уравнения эволюции пассивного скаляра

Пример: T_s – температура безынерционной примеси

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = c(T - T_s) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_0 T_s) = c(\mathcal{J} \nabla T - \nabla_0 T_s)$$

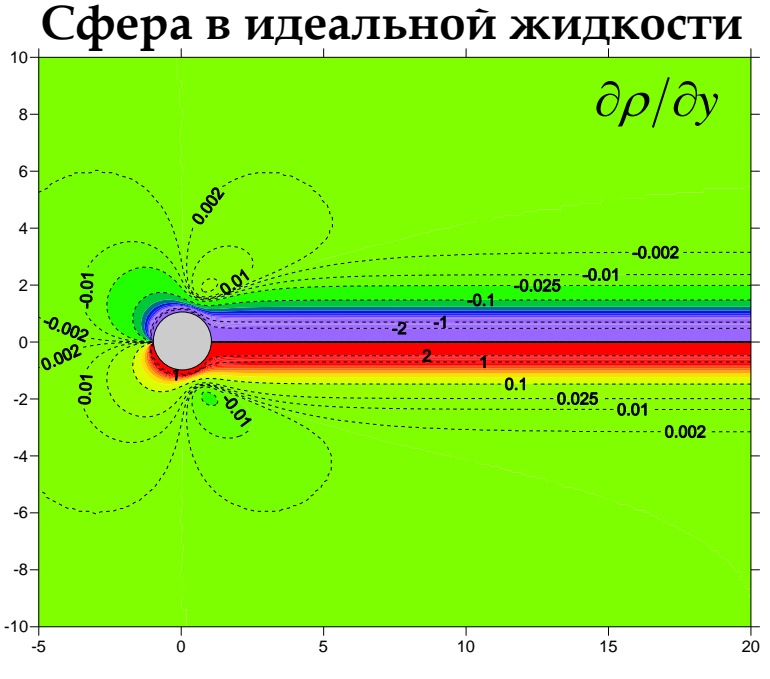
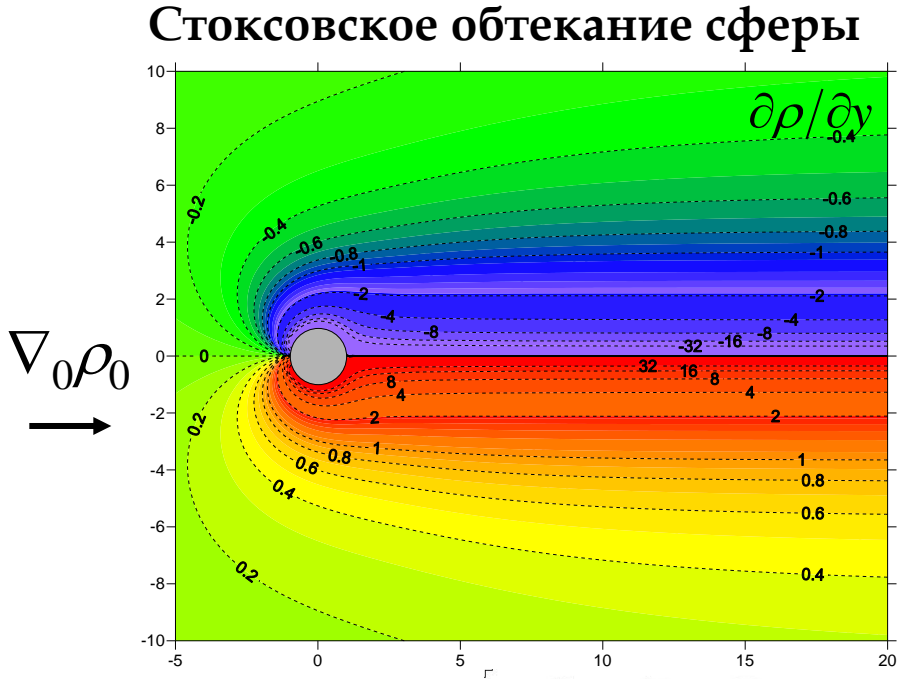
Начальные условия: $t = 0$: $\nabla_0 T_s = \nabla_0 T_{s0}$

Общее число уравнений – 16

**2. Пример применения метода:
эволюция градиента плотности
в быстрых течениях неоднородных
несжимаемых жидкостей**

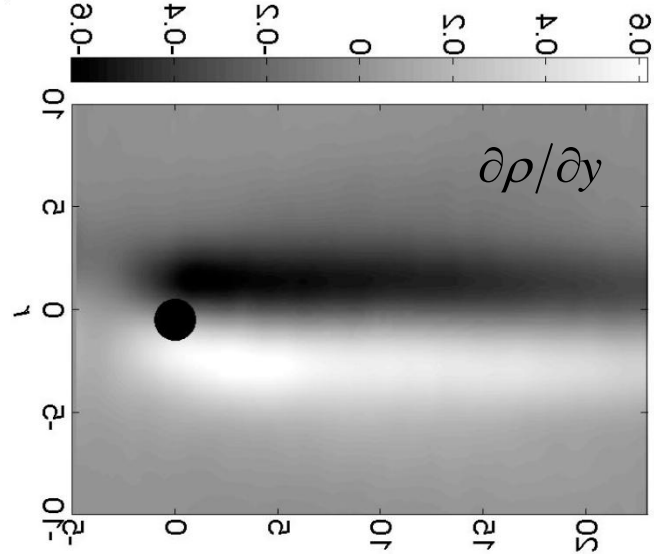
2.1. Обтекание сферы с продольным градиентом плотности в набегающем потоке: компонента $\partial\rho/\partial y$

Численное моделирование



Эксперимент

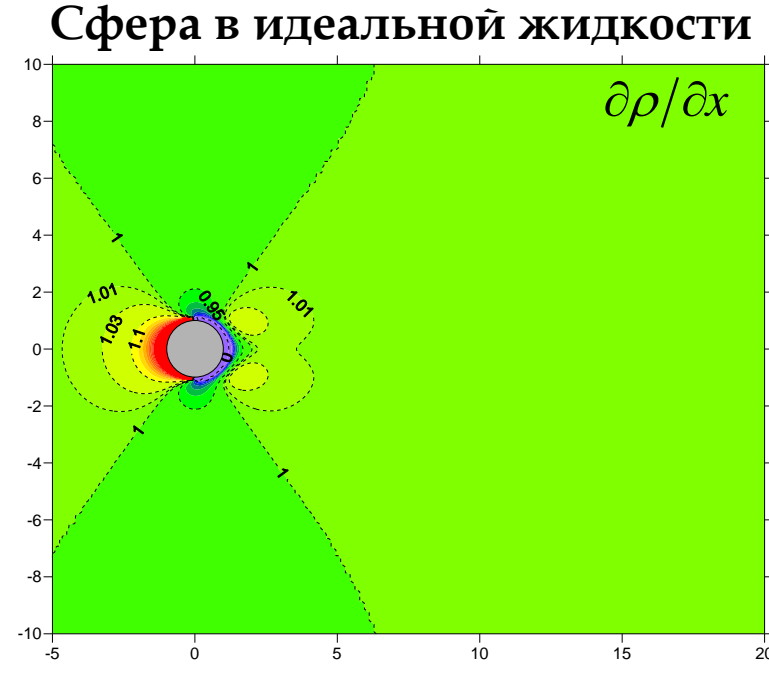
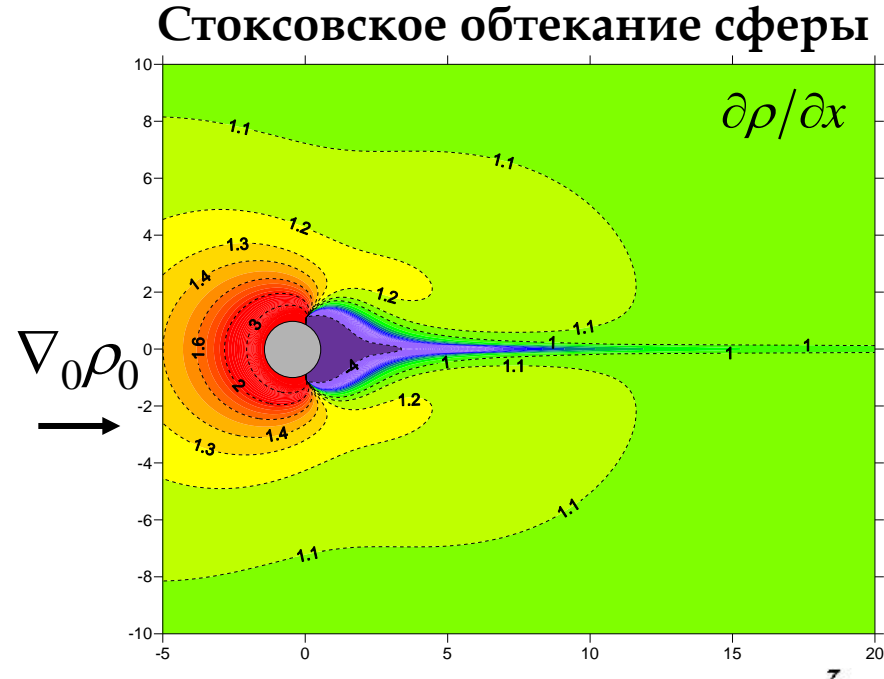
Yick et al., JFM, 2009:



Теневая картина поперечной компоненты градиента методом Microscale Synthetic Schlieren
 $Re = 2.1, Fr = 10.2, Pr = 700$

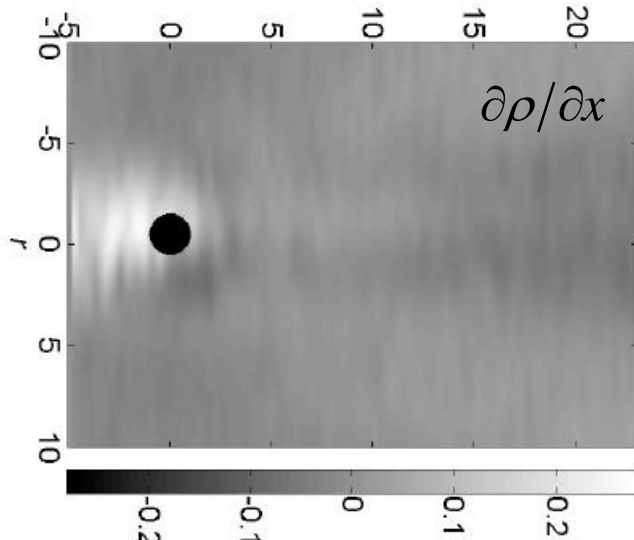
2.2. Обтекание сферы с продольным градиентом плотности в набегающем потоке: компонента $\partial\rho/\partial x$

Численное моделирование



Эксперимент

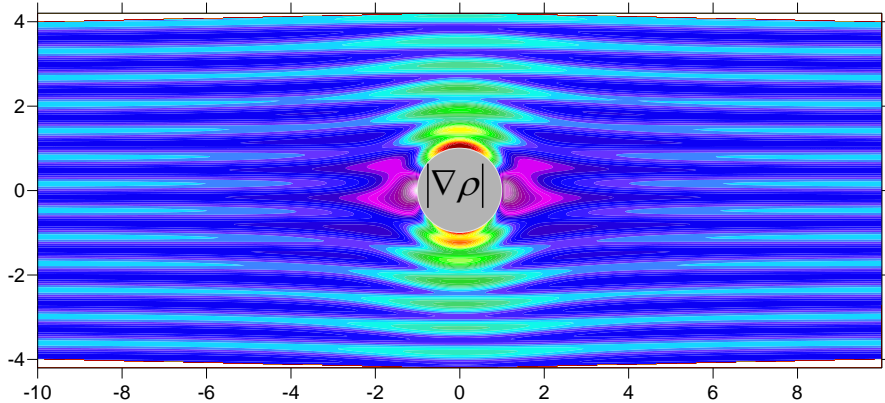
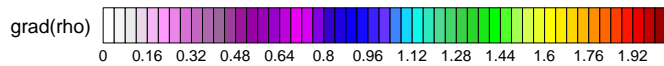
Yick et al., JFM, 2009:



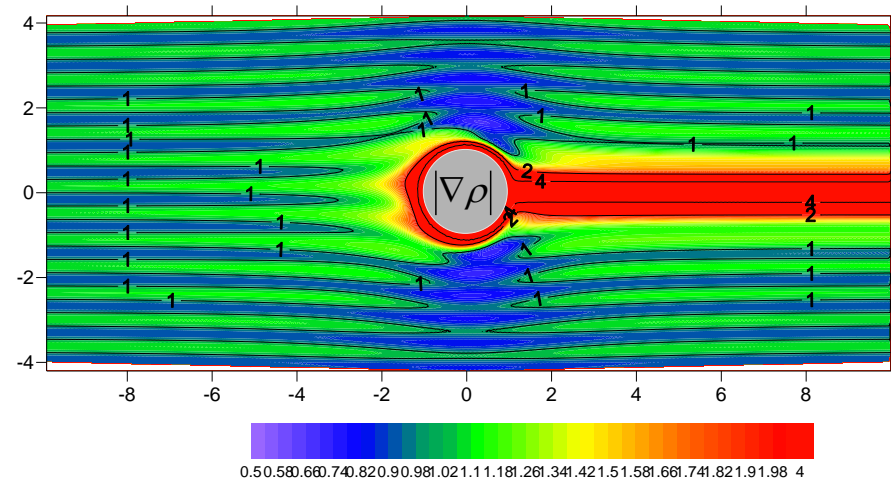
Теневая картина поперечной компоненты градиента методом Microscale Synthetic Schlieren
 $Re = 2.1, Fr = 10.2, Pr = 700$

2.3. Эволюция возмущений градиента плотности при обтекании цилиндра - численное моделирование

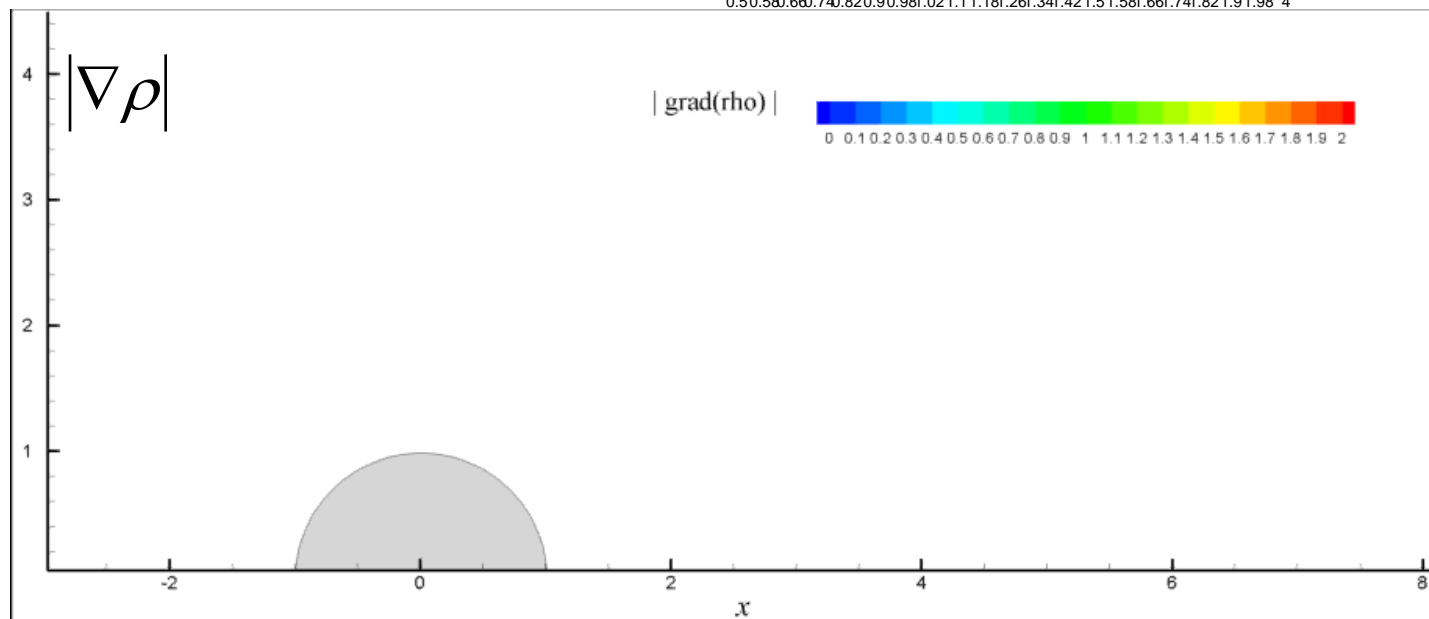
$$\nabla_0 \rho_0 = (0; 1 + \varepsilon \sin ky_0)$$



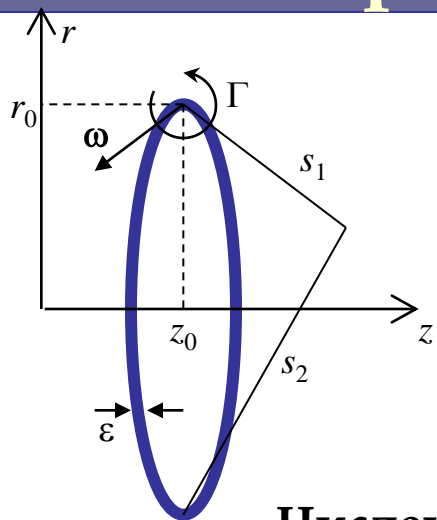
$$\nabla_0 \rho_0 = (1; \varepsilon \sin ky_0)$$



$$\nabla_0 \rho_0 = (\sin kx_0; 0)$$



2.4. Течение вертикально стратифицированной жидкости в окрестности вихревого кольца

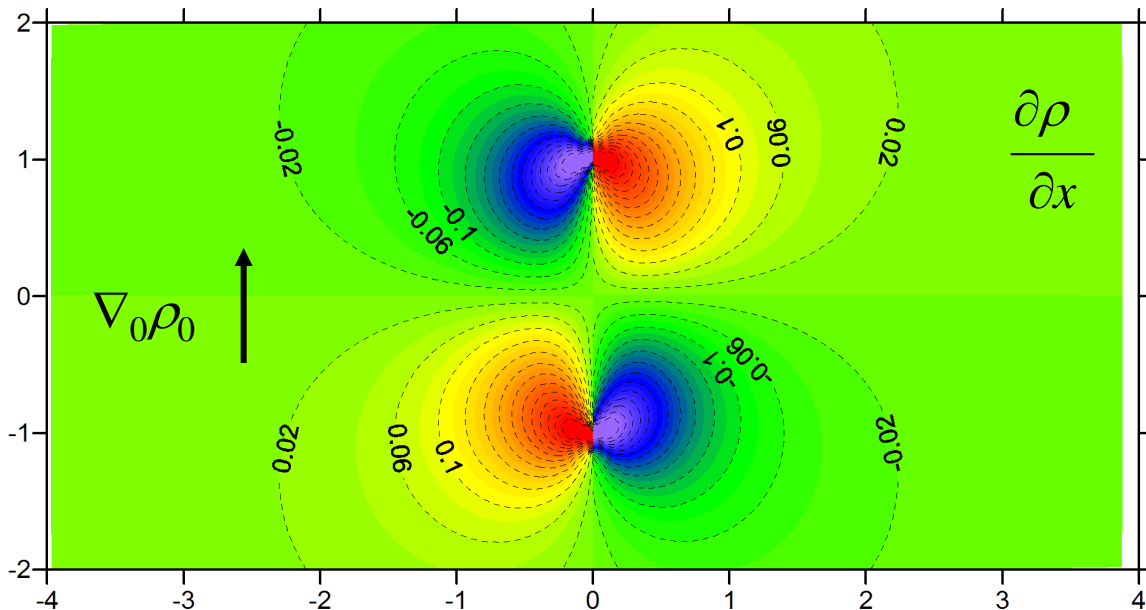


Бесконечно тонкое вихревое кольцо:

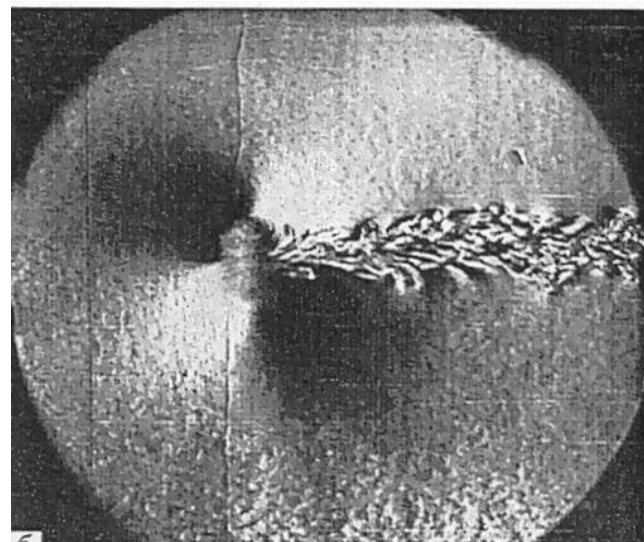
$$\psi = \psi_{ring} - \frac{Ur^2}{2} \quad u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{ring}}{\partial z} \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{ring}}{\partial r}$$

$$\psi_{ring} = -\frac{\Gamma}{2\pi} (s_1 + s_2) [K(\lambda) - E(\lambda)], \quad \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1}$$

Численное моделирование



Эксперимент



В.Е. Прохоров, МЖГ, 2010.

3. Обобщение метода для вычисления дифференциальных характеристик пассивной примеси, движущейся с проскальзыванием

3.1. Определяющие уравнения

$\mathbf{v}_s(t, \mathbf{r}) \neq \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ – пассивная примесь движется с проскальзыванием относительно несущей фазы.

$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор Гамильтона для вычисления различных дифференциальных характеристик:

Градиент концентрации: $\text{grad } n_s = \nabla n_s$	Дивергенция скорости: $\text{div } \mathbf{v}_s = \nabla \cdot \mathbf{v}_s$
Градиент температуры: $\text{grad } T_s = \nabla T_s$	Завихренность: $\boldsymbol{\omega}_s = \text{rot } \mathbf{v}_s = \nabla \times \mathbf{v}_s$

Уравнения в лагранжевых координатах:

$$\nabla = J^{-1} \nabla_0$$

$$\frac{dx_{si}}{dt} = v_{si} \quad \frac{dv_{si}}{dt} = f_{si}$$

$$\frac{dJ_{ij}}{dt} = \Omega_{ij} \quad \frac{d\Omega_{ij}}{dt} = \frac{\partial f_{si}}{\partial x_{0j}}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

– преобразование оператора, где $\nabla_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i0}} \right)$ и $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}$

– ОДУ для определения траекторий дисперсных частиц, где \mathbf{f}_s – сила межфазного взаимодействия

– ОДУ для определения компонент якобиана

Начальные условия:

$$t = 0: \quad x_{si} = x_{0i} \quad v_{si} = v_{0i} \quad J_{ij} = \delta_{ij} \quad \Omega_{ij} = \partial v_{0i} / \partial x_{0j}$$

3.2. Дополнительные уравнения для дифференциальных характеристик

Градиент концентрации: $\text{grad } n_s = \nabla n_s = J^{-1} \nabla_0 n_s$

Из уравнения неразрывности $n_s \det(J) = n_{s0}$:
$$\nabla_0 n_s = \frac{\nabla_0 n_{s0} - n_s \nabla_0 \det(J)}{\det(J)}$$

Градиент температуры: $\text{grad } T_s = \nabla T_s = J^{-1} \nabla_0 T_s$

Из уравнения теплопередачи $\frac{dT_s}{dt} = \theta(T - T_s)$:
$$\frac{d(\nabla_0 T_s)}{dt} = \theta(J \nabla T - \nabla_0 T_s)$$

T – известное поле температур несущей фазы

Дивергенция: $\text{div } \mathbf{v}_s = \nabla \cdot \mathbf{v}_s = J^{-1} \nabla_0 \cdot \mathbf{v}_s$

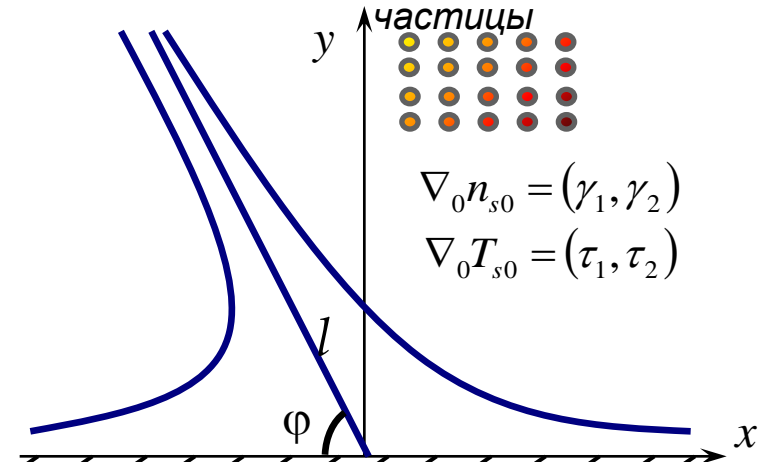
Из уравнения движения $\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)$:
$$\frac{d(\nabla_0 \cdot \mathbf{v}_s)}{dt} = \beta(J \text{div } \mathbf{v} - (\nabla_0 \cdot \mathbf{v}_s))$$

\mathbf{v} – известное поле скорости несущей фазы

Завихренность: $\boldsymbol{\omega}_s = \text{rot } \mathbf{v}_s = \nabla \times \mathbf{v}_s = J^{-1} \nabla_0 \times \mathbf{v}_s$

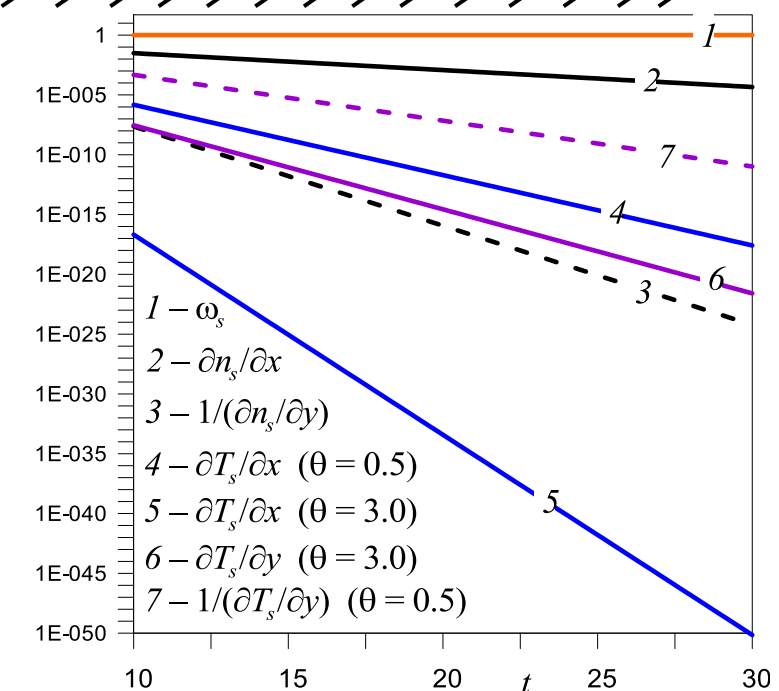
Из уравнения движения :
$$\frac{d[\nabla_0 \times \mathbf{v}_s]}{dt} = \beta(J \boldsymbol{\omega} - [\nabla_0 \times \mathbf{v}_s])$$
 $\boldsymbol{\omega}$ – известное поле завихренности несущей фазы

3.2. Пример расчета для дисперсного течения в окрестности плоской критической точки в идеальном несжимаемом газе



$$\begin{cases} u = x + 2y \operatorname{ctg} \varphi & \text{— безразмерный вид поля скорости} \\ v = -y & \text{вблизи критической точки в невязкой} \\ T = \operatorname{const} & \text{несжимаемой жидкости.} \end{cases}$$

В данном случае уравнения метода могут быть решены аналитически. Полученное решение имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow 0$) для малоинерционных частиц :



$$\frac{\partial n_s}{\partial x} \sim \gamma_1 c_1 \exp(-k_1 t) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial n_s}{\partial y} \sim (\gamma_2 - \gamma_1 \operatorname{ctg} \varphi) c_2 \exp(k_2 t) \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} \sim \tau_1 \exp[(-\theta - k_3)t] \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial y} \sim (\tau_2 - \tau_1 \operatorname{ctg} \varphi) c_4 \exp[(-\theta - k_4)t]$$

$$\omega_s = (\omega_0 - 2 \operatorname{ctg} \varphi) \exp(-\beta t) + \operatorname{ctg} \varphi \rightarrow \operatorname{ctg} \varphi$$

Особенности предложенного метода

- Является развитием полного лагранжева метода (А.Н. Осипцов, 2000).
- Компоненты градиента по пространственным эйлеровым координатам вычисляются вдоль лагранжевых траекторий.
- Система определяющих уравнений состоит из ОДУ и конечных соотношений.
- Одинаковый численный алгоритм для стационарных и нестационарных течений.
- Можно использовать в течениях с сингулярными значениями градиента скаляра.