X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики
24-30 августа 2011, Нижний Новгород, Россия

УСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

С.А. Боронин
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
boroninsa@imec.msu.ru

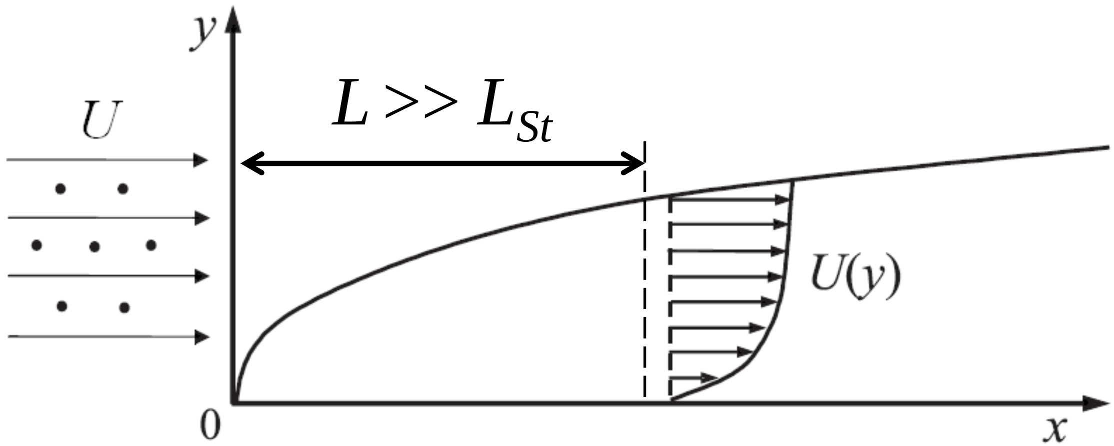
Мотивация

- Исследования устойчивости течений двухфазных сред проводились ранее в рамках упрощенной постановки Сэфмана
  - Стоксовское взаимодействие фаз;
  - Пренебрежимо малая объемная доля включений;
  - Равномерное распределение дисперсной фазы в основном течении.
- Для описания реальных течений дисперсных сред необходимо учитывать дополнительные факторы
  - Неоднородность распределения дисперсной фазы (миграция частиц)
  - Нестоксовские компоненты межфазной силы (напр., подъемная сила)
  - Рассогласование скоростей фаз в основном течении (гравитационное осаждение частиц)
  - Конечную объемную доли частиц (суспензии)
- Исследование устойчивости проводилось только в рамках модального подхода (на основе анализа одной наиболее неустойчивой моды)
- Отсутствие экспериментальных данных

Содержание доклада

- Устойчивость течения запыленного газа на плоской пластине
  (влияние **неоднородности распределения дисперсной фазы** в основном течении и **подъемной силы Сэфмана**)
- Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале
  (влияние **рассогласования скоростей фаз**)
- Устойчивость сдвиговых течений суспензии
  (влияние **конечной объемной доли включений** и их **неоднородного распределения**)
- Алгебраическая неустойчивость течения запыленного газа в плоском канале
  (**немодальный анализ** устойчивости течений дисперсной среды, **оптимальные возмущения)**

Устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое с неоднородным распределением частиц[1]

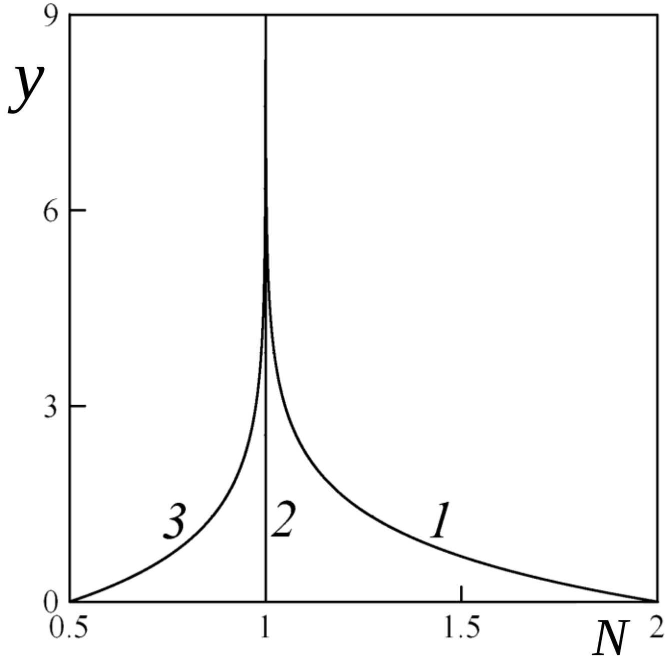


Течение запыленного газа в равновесной по скоростям области пограничного слоя

- **Модель запыленного газа** с малой объемной долей частиц
- Межфазное взаимодействие: **силы Стокса и Сэфмана**
- Основное течение: профиль скорости Блазиуса, **неоднородная концентрация частиц**

[1] Боронин С.А., Осипцов А. Н. Устойчивость течения дисперсной смеси в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 76–87

Устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое: профили концентрации частиц и определяющие параметры



Профили концентрации частиц в основном течении

1. $N(y) = 1+\exp\{-y\}$;
2. $N(y) = 1$;
3. $N(y) = 1-0.5\exp\{-y\}$;

Определяющие параметры:

Re – число Рейнольдса

α – массовая концентрация частиц

β – параметр инерционности частиц

K – масштаб подъемной силы

Масштабы течения:

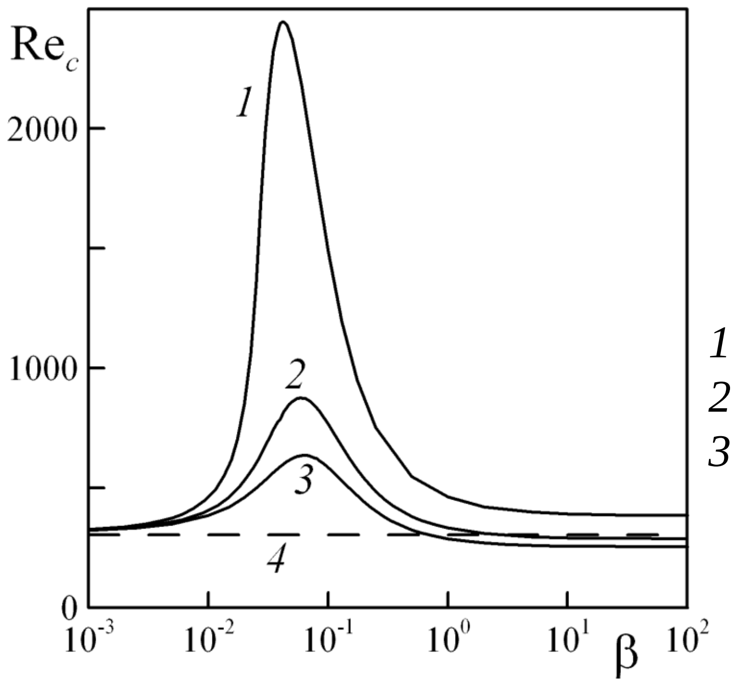
$U = U(\infty)$, $N = N(\infty)$,

$\delta = \delta(L)$ – локальная толщина пограничного слоя

$$\mathrm{Re} = \frac{\delta U_0}{\nu},\quad \alpha = \frac{mN}{\rho},\quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu\delta}{mU_0},\quad K = \frac{6.46\sigma^2(\delta\mu\rho)^{1/2}}{m(U)^{1/2}} = \frac{6.46}{2\pi\sqrt{2}}\sqrt{\beta}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_s^0}}$$

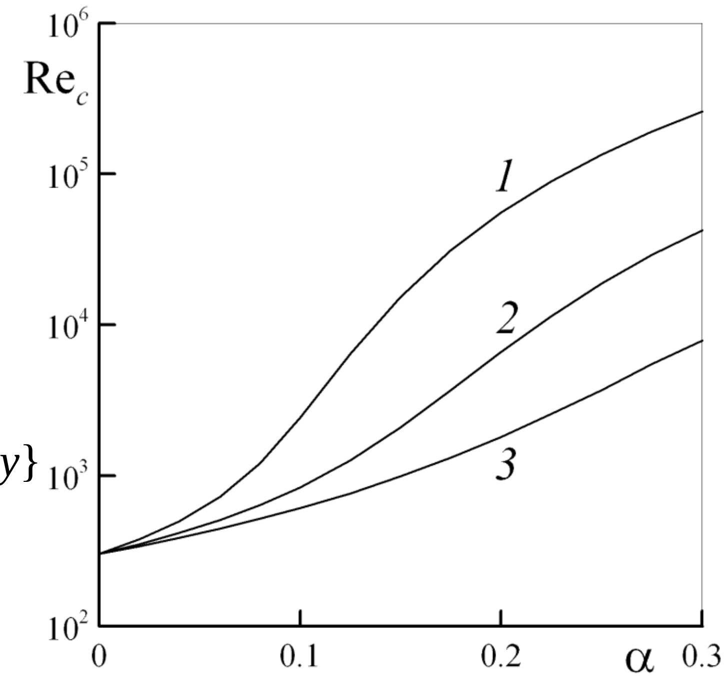
Устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое: основные результаты

Зависимость критического числа Рейнольдса Re_c от параметра инерционности частиц β



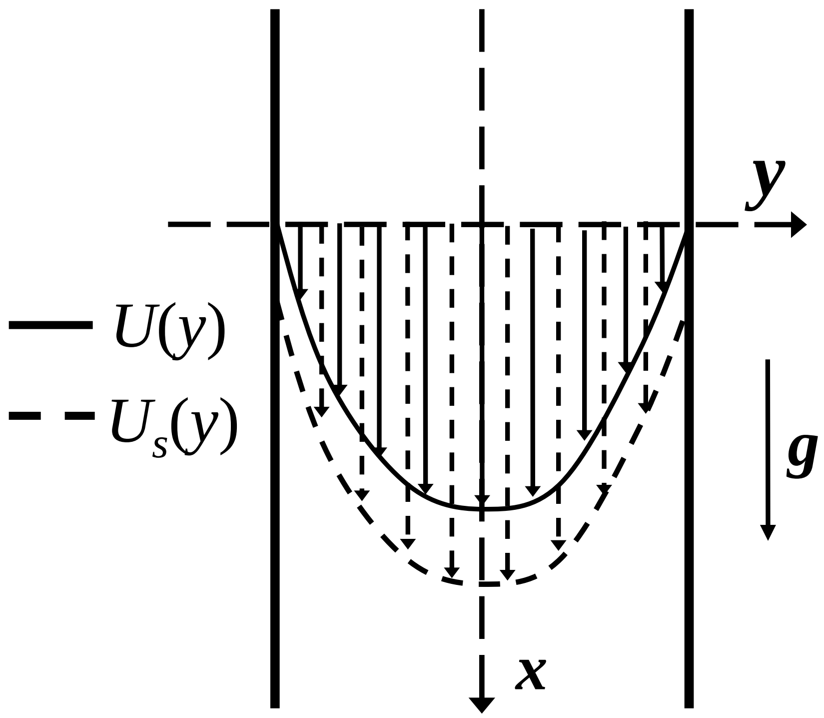
1 - $N(y) = 1+\exp\{-y\}$
2 - $N(y) = 1$
3 - $N(y) = 1-0.5\exp\{-y\}$

Зависимость критического числа Рейнольдса Re_c от массовой концентрации включений α.



- Течение наиболее устойчиво в случае увеличивающейся по направлению к стенке концентрации частиц (кривая *1*)
- Подъемная сила значительно стабилизирует для частиц с длиной релаксации порядка локальной толщины пограничного слоя ($\beta \sim 1$)
- Течение стабилизируется при увеличении массовой доли включений α

Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале с учетом рассогласования скоростей фаз в основном течении[2]



Течение запыленного газа в вертикальном канале

- **Модель запыленного газа**
- Межфазное взаимодействие: сила Стокса
- Основное течение: профиль скорости Пуазейля для несущей фазы, **скорость частиц отличается на скорость осаждения одиночной частицы**

[2] Боронин С.А. Устойчивость восходящего и нисходящего течений запыленного газа в канале с учетом силы тяжести // В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых. Октябрь 2006г. Под ред. Черного Г.Г., Самсонова В.А. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. С. 79–86.

Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале: безразмерные параметры и основное течение

Масштабы течения:

$U_0 = U(0)$, L – половина ширины канала

Основное течение:

$$U(y) = 1 - y^2$$

$$U_s(y) = U(y) \pm \frac{1}{\mathrm{Fr}^2 \beta}$$

$$N(y) = 1$$

Определяющие параметры:

Re – число Рейнольдса

α – массовая концентрация включений

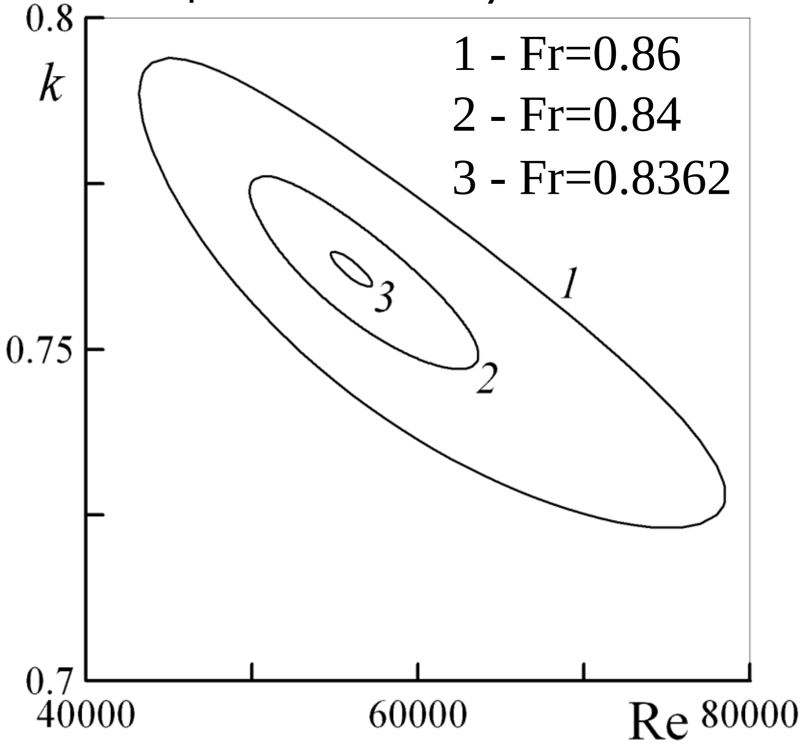
β – параметр инерционности частиц

Fr – число Фруда

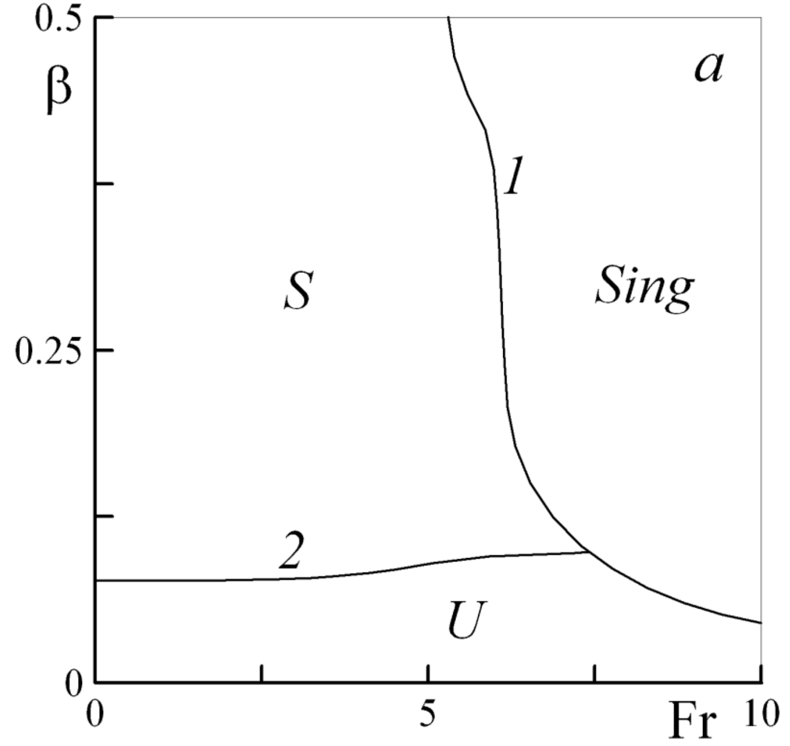
$$\mathrm{Re} = \frac{LU_0}{\nu}, \quad \mathrm{Fr}^2 = \frac{U_0^2}{gL}, \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu L}{mU_0}, \quad \alpha = \frac{mN}{\rho}$$

Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале: основные результаты

Кривые нейтральной устойчивости при $\alpha = 0.1$ and $\beta = 0.09$

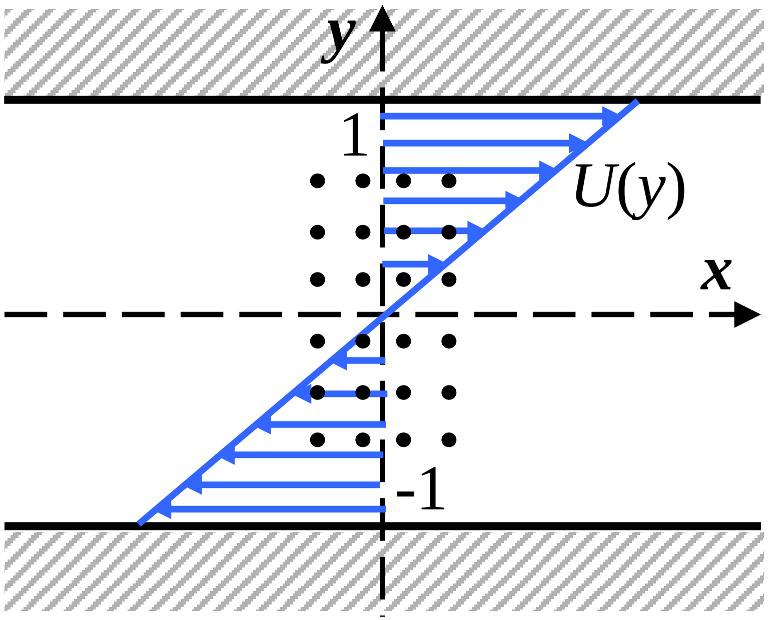


Области устойчивости (S), и неустойчивости (U) в плоскости (Fr, β)

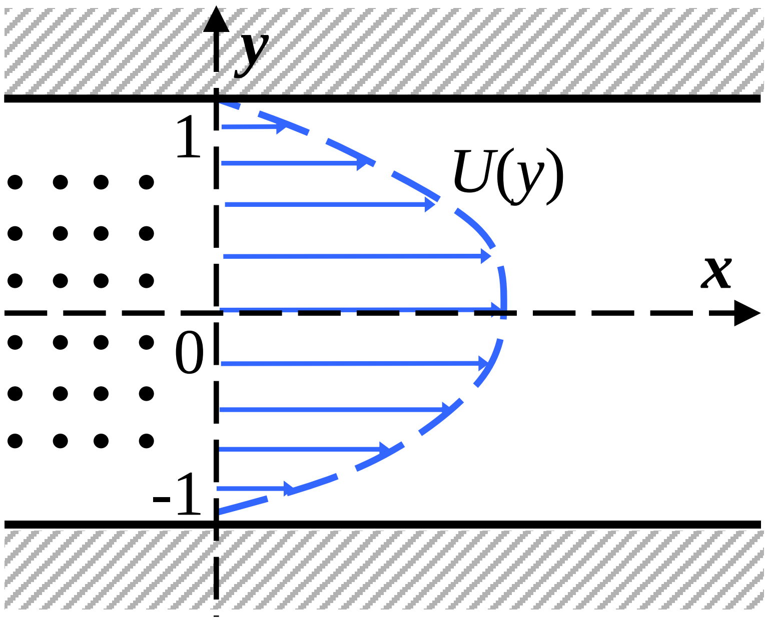


- Область неустойчивости замкнута для всех конечных значений числа Фруда Fr
- Найдена область в плоскости параметров (Fr, β), в которой течение запыленного газа в вертикальном канале устойчиво

Устойчивость сдвиговых течений суспензии[3,4,5]



Плоское течение Куэтта суспензии



Плоское течение Пуазейля суспензии

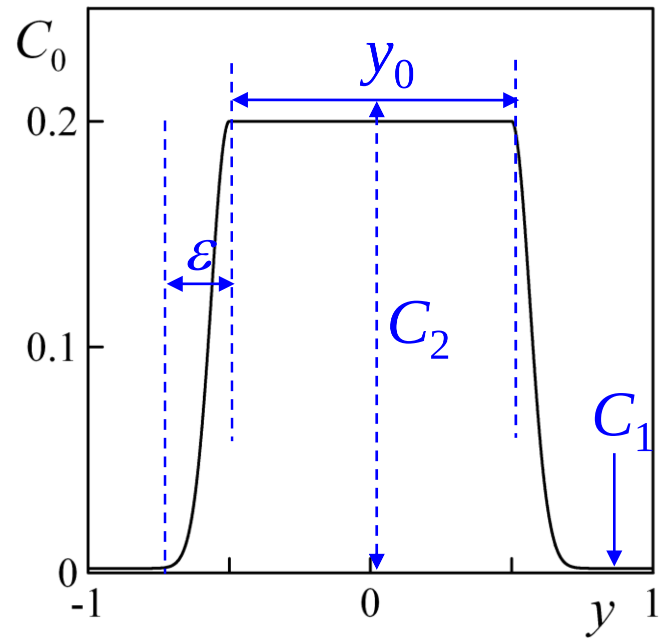
[3] Боронин С.А. Исследование устойчивости течения суспензии в плоском канале с учетом конечной объемной доли частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 40–53.
[4] Боронин С.А. Гидродинамическая устойчивость стратифицированного течения суспензии в плоском канале // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 477-480.
[5] Боронин С.А. Устойчивость плоского течения Куэтта дисперсной среды с конечной объемной долей частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2011. N 1. С. 85-94

Устойчивость сдвиговых течений суспензии: постановка

- **Модель взаимопроникающих континуумов с конечной объемной долей включений**
- Межфазное взаимодействие: **сила Стокса с поправкой Бринкмана**
- Основное течение: профили скорости Пуазейля и Куэтта без рассогласования скоростей фаз, **неоднородная концентрация частиц**

Неоднородное распределение частиц $C_0(y)$ (миграция частиц от стенок):

$$C_0(y)=\begin{cases}(C_2-C_1)\exp\left\{-\dfrac{(y+y_0)^2}{\varepsilon^2}\right\}+C_1, & -1<y<-y_0\\ C_2, & -y_0<y<y_0\\ (C_2-C_1)\exp\left\{-\dfrac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}\right\}+C_1, & y_0<y<1\end{cases}$$



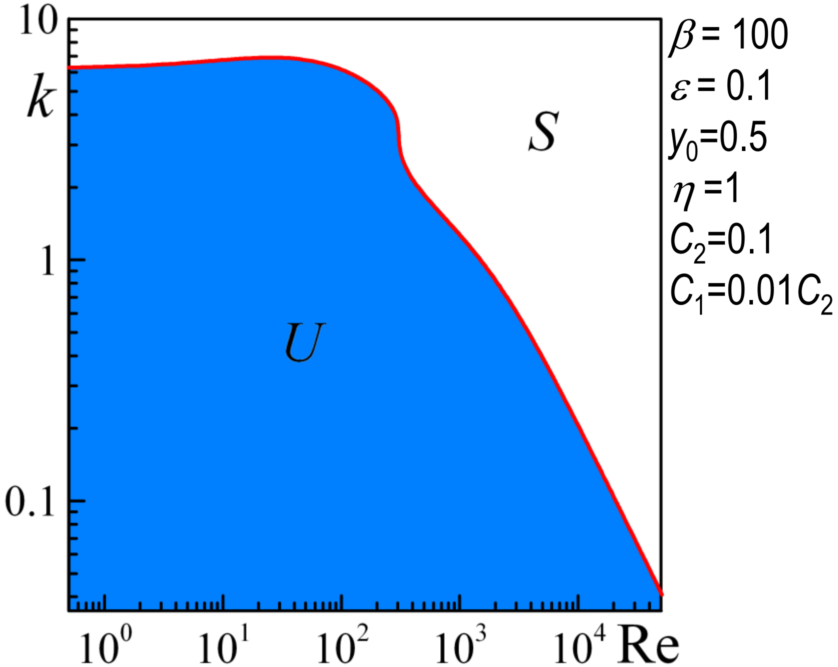
Определяющие параметры:

$$\mathrm{Re}=\frac{LU_0\rho^0}{\mu_0},\quad \beta=\frac{6\pi\sigma\mu_0 L}{mU_0},\quad \eta=\frac{\rho_s^0}{\rho^0}$$

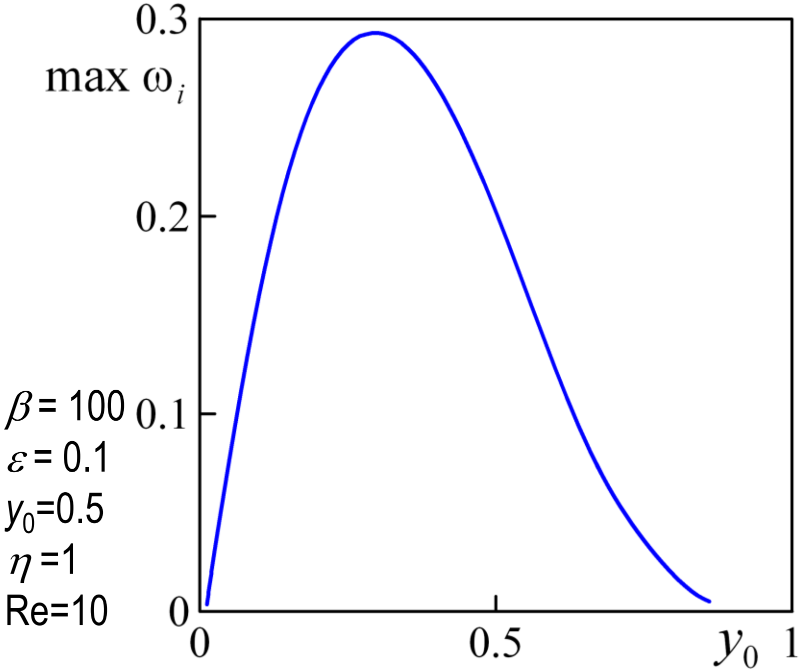
(η - отношение плотностей материалов фаз)

Устойчивость сдвиговых течений суспензии: основные результаты

Области неустойчивости в плоскости (Re, k)
(S, U – области устойчивости и неустойчивости)



Максимальный инкремент нарастания max $\omega_i(k)$ от «ширины» распределения частиц y_0



- Неоднородное распределение включений приводит к появлению неустойчивости при Re<1 для обоих типов течений
- Максимальный инкремент нарастания волн достигается при Re~10
- Полученная неустойчивость подавляется при увеличении Re
- Неустойчивость подавляется в случае "широкого" (y_0>0.8) и "узкого" (y_0<0.01) распределения частиц

Алгебраическая неустойчивость

- Метод Фурье исследования устойчивости: любое малое возмущение $\mathbf{q}$ плоскопараллельного стационарного течения представляется в виде комбинации (ряда или интеграла) нормальных мод $\mathbf{q}_n$:

$$L\mathbf{q} = \sigma\mathbf{q}, \quad \{\tilde{\mathbf{q}}_n, \sigma_n\}, \quad \mathrm{Re}\{\sigma_1\} > \mathrm{Re}\{\sigma_2\} > \dots$$

$$\mathbf{q} = \sum_1^{\infty} \gamma_n \mathbf{q}_n(y) \exp\{ikx + \sigma_n t\} \qquad (1)$$

- Классический метод исследования: течение устойчиво <=> для заданных безразмерных параметров первая мода затухает ($\mathrm{Re}\{\sigma_1\} < 0$) для любого *k.*

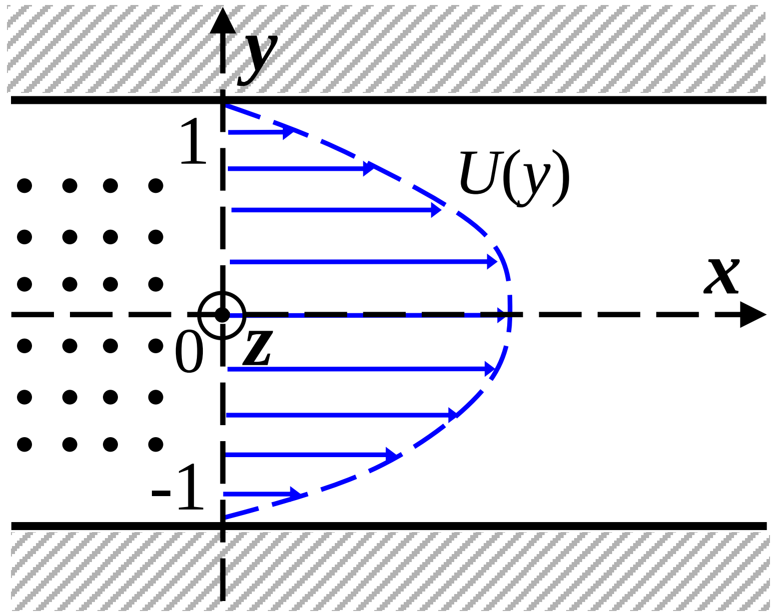
- Дифференциальный оператор L – ***неэрмитов***, собственные функции неортогональны, суперпозиция мод (1) на конечном интервале времени не определяется наиболее неустойчивой гармоникой! (возможен **алгебраический рост** возмущений)

- **Оптимальное возмущение**: комбинация мод (1), энергия которой нарастает максимально к заданному конечному моменту времени

Алгебраическая неустойчивость течения дисперсной среды в плоском канале[6]

- **Модель запыленного газа**
- Межфазное взаимодействие: **сила Стокса**
- Основное течение: профиль скорости Пуазейля, **неоднородная концентрация частиц**
- **Трехмерные возмущения** (теорема Сквайра – только для модального анализа!)

Плоское течение Пуазейля запыленного газа



[6] Боронин С.А. Оптимальные возмущения течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц //Изв. РАН. МЖГ. (подана в редакцию в июле 2011)

Алгебраическая неустойчивость течения дисперсной среды в плоском канале: линеаризованная система уравнений

Трехмерные нормальные моды:

$$Q(x,y,z,t)=q(y)\exp[i(k_x x+k_z z)+\sigma t]$$

$$\begin{cases}\{\Delta^2/\mathrm{Re}-ik_xU\Delta+ik_xU''-\alpha\beta\Delta\}v+\alpha\beta\Delta v_s-\alpha\beta I_s'=\sigma\Delta v\\ [-ik_xU+\Delta/\mathrm{Re}-\alpha\beta]\omega+\alpha\beta\omega_s-ik_zU'v=\sigma\omega\\ -(ik_xU+\beta)v_s+\beta v=\sigma v_s\\ -(ik_xU+\beta)\omega_s-ik_zU'v_s+\beta\omega=\sigma\omega_s\\ -(ik_xU+\beta)I_s-2ik_xU'v_s=\sigma I_s\end{cases}$$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\ \ \omega_s=\frac{\partial u_s}{\partial z}-\frac{\partial w_s}{\partial x},\ \ I_s=\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s,\ \ \Delta=\frac{d^2}{dy^2}-k^2,\ \ k^2=k_x^2+k_z^2$$

Граничные условия: $v,\ v',\ \omega\big|_{y=\pm1}=0$

Определяющие параметры: $\mathrm{Re}=\dfrac{LU_0}{\nu},\ \ \alpha=\dfrac{mN}{\rho},\ \ \beta=\dfrac{6\pi\sigma\mu L}{mU_0}$

Алгебраическая неустойчивость течения дисперсной среды в плоском канале: профили концентрации и оптимальные возмущения

Профили концентрации частиц в основном течении:

(пылевые слои, симметричные относительно оси канала)

$$N(y) = 0.5N_0(\delta,\varepsilon)\left(\exp\left\{-(y-\xi)^2/\delta^2\right\} + \exp\left\{-(y+\xi)^2/\delta^2\right\}\right)$$

$$N_0(\delta,\varepsilon):\quad \int_{-1}^{1} N(y)dy = 2$$ (δ - ширина слоя, ξ - расстояние до оси течения)

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \mathbf{q}_n(y) \exp\{i(k_x x + k_z z) + \sigma_n t)\},\ \ \mathbf{q}_n = (v_n, \omega_n, v_{s,n}, \omega_{s,n}, I_{s,n})^T$$

Функционал энергии $E(t,\gamma)$: плотность кинетической энергии возмущений несущей фазы

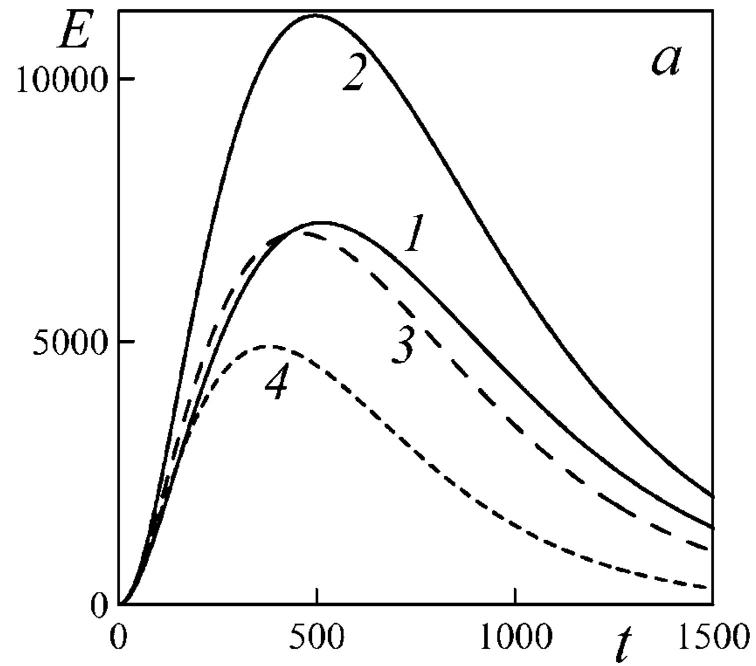
$$E(t,\gamma) = \int_0^a \int_0^b \int_{-1}^{1} (\mathrm{Real}\{u\}^2 + \mathrm{Real}\{v\}^2 + \mathrm{Real}\{w\}^2) dxdydz = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(v^* v + \frac{1}{k^2}\left\{\frac{dv^*}{dy}\frac{dv}{dy} + \omega^*\omega\right\}\right)dy$$

$$a = 2\pi/k_x,\ \ b = 2\pi/k_z$$ (`*` - комплексное сопряжение)

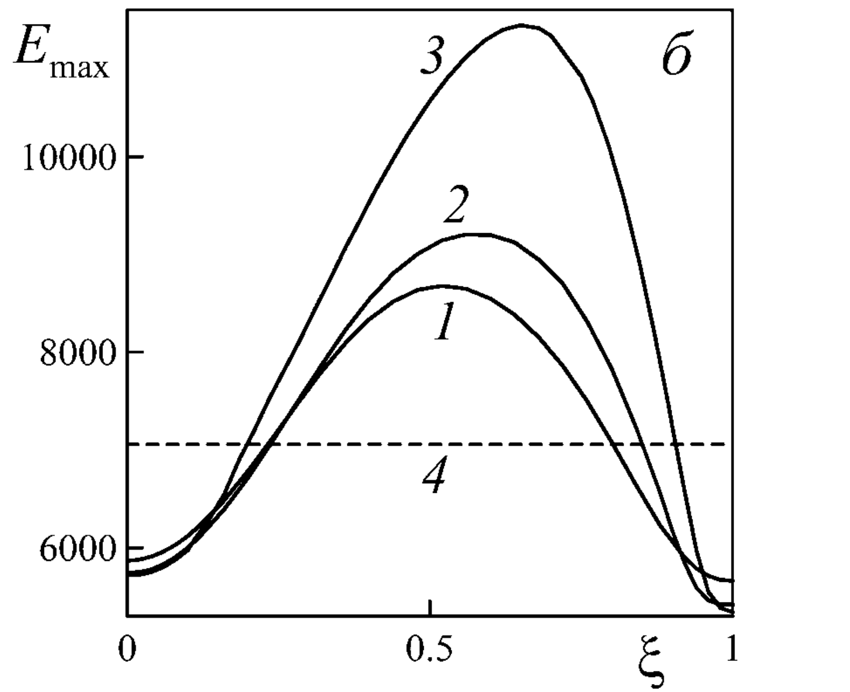
Поиск оптимальных возмущений = максимизация функционала энергии

$$\gamma - ?:\ E(t,\gamma) \to \max_{\gamma},\quad E(0,\gamma) = 1$$

Алгебраическая неустойчивость течения дисперсной среды в плоском канале: основные результаты



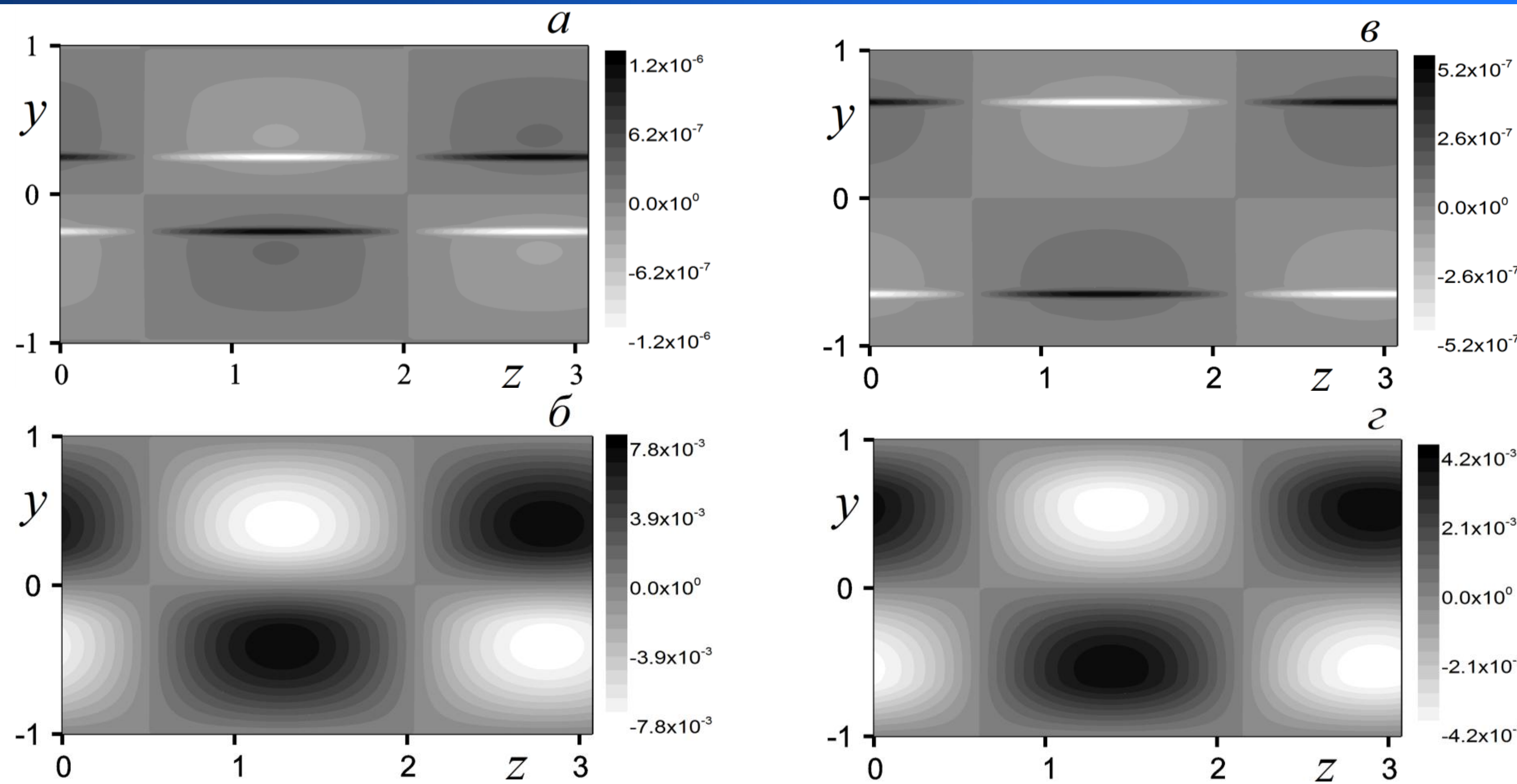
Зависимость энергии оптимальных возмущений E от времени. Кривые *1*, *2* соответствуют ξ = 0.25, 0.65, а *3* – однородное распределение частиц, 4 – чистая жидкость. k_x = 0, k_z = 2.044, Re = 5000, α = 0.2, β = 10, δ = 0.02



Максимум энергии оптимальных возмущений E_{max} от положения слоев дисперсной фазы ξ при α = 0.2. Кривые *1-3* соответствуют δ = 0.1, 0.05, 0.02. Кривая *4* – однородное распределение частиц ($\delta >> 1$). $k_x = 0$, $k_z = 2.044$, Re = *5000*, $\beta = 10$.

- Оптимальные возмущения – полосчатые структуры («стрики», k_x=0, k_z~2)
- Энергия оптимальных возмущений усиливается при добавлении дисперсной примеси
- Наибольшая энергия возмущений достигается для случая, когда пылевые слои расположены посередине между осью течения и стенками ($\xi \sim 0.5$)

Алгебраическая неустойчивость течения дисперсной среды в плоском канале: основные результаты



Распределение продольной компоненты скорости оптимальных возмущений несущей фазы u в плоскости (y, z) при t = 0 (*а*, *в*) и в момент достижения максимума плотности энергии (*б*, *г*). Фигуры (*а*, *б*) соответствуют $\xi = 0.25$, а (*в*, *г*) – $\xi = 0.65$. $k_x = 0$, $k_z = 2.044$, Re = *5000*, $\alpha = 0.2$, $\beta = 10$, $\delta = 0.02$.

- Максимум продольной компоненты скорости (и кинетической энергии) оптимальных начальных возмущений соответствует положению пылевых слоев

Выводы

- В рамках классического модального подхода проанализирована устойчивость различных сдвиговых течений дисперсных сред и изучено влияние новых факторов (неоднородности распределения дисперсной фазы и рассогласования скоростей фаз в основном течении, нестоксовских компонент межфазной силы, конечной объемной доли частиц)
  - Течение запыленного газа в пограничном слое стабилизируется при увеличении концентрации дисперсной фазы по направлению к стенке; подъемная сила существенно стабилизирует течение для частиц с длиной релаксации порядка локальной толщины пограничного слоя;
  - Рассогласование скоростей фаз, вызванное гравитационным осаждением частиц при течении газа в вертикальном канале, значительно стабилизирует течение. Начиная с некоторого значения числа Фруда, течение дисперсной среды устойчиво при любом значении числа Рейнольдса;
  - Неоднородное распределение включений, обладающих малой, но конечной объемной долей, приводит к появлению нового механизма неустойчивости, который появляется уже при малых значениях числа Рейнольдса сдвиговых течений суспензий.
- Впервые исследована алгебраическая (немодальная) неустойчивость плоско-параллельного течения дисперсной среды с неоднородным распределением частиц (в виде пылевых слоев).
  - Получено, что оптимальные возмущения являются полосчатыми структурами («стриками»), обладающими большей кинетической энергией, чем в случае течения чистой жидкости;
  - Для заданной средней массовой концентрации частиц, оптимальные возмущения обладают наибольшей энергией в случае, когда частицы распределены в области посередине между осью течения и стенками;
  - Максимум энергии оптимальных начальных возмущений соответствует положению слоев частиц.

Спасибо за внимание!